O kolejności wykonywania *działań równorzędnych*

Znane są dobrze reguły kolejności wykonywania działań arytmetycznych w sytuacjach takich jak mnożenie-dodawanie. Kłopoty natomiast sprawiają dwie pary działań równorzędnych: dodawanie-odejmowanie oraz mnożenie-dzielenie.

ZBIGNIEW SEMADENI

Helena Rucińska („Matematyka" 1/2007, s. 60) poruszyła istotną kwestię: *W jakiej kolejności należy wykonywać działania arytmetyczne w sytuacjach typu $a:b\cdot c$ (gdzie a, b, c są liczbami)?* Napisała, że *reguła* $a:b\cdot c = \frac{a}{b}\cdot c$ *jest niezgodna z zasadami przyjętymi w algebrze, ponieważ* $a:b\cdot c = \frac{a}{b\cdot c}$.

Nie wiem, w jakim podręczniku algebry Autorka znalazła zasady, na które się powołuje. Gdy ok. 40 lat temu wielu nauczycieli pytało mnie o zasady dotyczące kolejności działań arytmetycznych w sytuacji, gdy jest tylko mnożenie i dzielenie liczb, a nie ma nawiasów, przekazywałem im moje ówczesne stanowisko: skoro takie sytuacje zdarzają się rzadko, lepiej każdorazowo wstawiać nawiasy, niż stracić sporo czasu w szkole na opanowanie przez uczniów jeszcze jednej, niezbyt potrzebnej reguły. Powoływałem się też na zalecenia PWN dla autorów podręczników uniwersyteckich, aby unikali dwuznacznego wyrażenia np. $1/x \sin x$, wstawiając nawiasy: bądź $(1/x)\sin x$, bądź $1/(x\sin x)$, tak aby czytelnik nie miał żadnych wątpliwości; / to znak kreski ułamkowej, pisanej skośnie dla zaoszczędzenia miejsca, ale jest to zarazem akademicki odpowiednik szkolnego znaku dzielenia.

Aby móc należycie ocenić tego rodzaju reguły, należy wziąć pod uwagę ich *konwencjonalny charakter*. Uczniom nieraz wydaje się, że reguła np. „najpierw mnóż, potem dodawaj" jest takim samym prawem matematycznym co np. „wynik dodawania nie zależy od kolejności składników". Otóż przemienność dodawania jest prawem nauki (można by metaforycznie rzec, że prawo to zaakceptował Pan Bóg przy stworzeniu świata), a więc nic tu zmienić nie można. Natomiast *umowy dotyczące kolejności działań* są dziełem ludzkim (podobnie jak konwencja, że znakiem dodawania jest krzyżyk + i że wzory matematyczne pisze się od lewej do prawej, a nie np. z dołu do góry), toteż można rozpatrywać celowość tych umów i ewentualnie postulować jakieś zmiany.

Okazuje się, że w dostępnej literaturze nie ma jednoznacznych, niekwestionowanych reguł, które by rozstrzygały wszystkie wątpliwości. Co więcej, w trudniejszych sytuacjach obserwuje się tendencję nie „od reguły do praktyki", lecz „od praktyki do reguły", tzn. analizuje się sposób zapisywania wyrażeń w podręcznikach (akademickich i szkolnych) oraz w publikacjach naukowych i na tej podstawie próbuje się formułować jakieś reguły. W dalszym ciągu tego artykułu pokażę parę przykładów, które mnie zaskoczyły. Uzmysłowiły mi, że sprawa jest znacznie bardziej skomplikowana, niż się wydawało.

W terminologii uniwersyteckiej zamiast określenia „kolejność wykonywania działań" nieraz mówi się o *regułach opuszczania nawiasów*. Można ogólnie przyjąć, że jeżeli w wyrażeniu występuje więcej niż jedno działanie, to o jego interpretacji rozstrzygają nawiasy, jednakże ograniczenie się do takiej reguły nadmiernie skomplikowałoby zapisy. Mostowski ([4], s. 18) ujął tę kwestię następująco (w kontekście rachunku zdań): *zbytnie nagromadzenie nawiasów utrudnia odczytywanie wzorów. Przyjmujemy zatem następujące reguły, które pozwolą znacznie zredukować liczbę nawiasów* (...) *Podobną regułę przyjmujemy też zazwyczaj w arytmetyce: piszemy np. „$a + b \cdot c$" zamiast „$a + (b \cdot c)$"; nawias jest zbędny, gdyż znak mnożenia wiąże mocniej niż znak dodawania*.

W szkole już dwa nawiasy (jeden wewnątrz drugiego) sprawiają uczniom poważne trudności, toteż autorzy unikają takich nawiasów; starają się przy tym tak zapisywać wyrażenia i działania, aby sens zapisu był możliwie jasny. W przypadku dzielenia najprostszym wyjściem jest notacja ułamkowa. Długość kreski ułamkowej automatycznie wyznacza zakres odpowiednich działań.

W polskich podręcznikach na ogół można znaleźć jakiś wariant poniższego sformułowania, które będziemy uzupełniać i komentować:

> (*) *Gdy obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego, w którym występują nawiasy, to najpierw wykonujemy działania w nawiasach (zaczynając od najbardziej wewnętrznych). Gdy nie ma nawiasów, to najpierw wykonujemy potęgowanie i pierwiastkowanie, potem mnożenie z dzieleniem, a na koniec dodawanie z odejmowaniem. Gdy występuje tylko dodawanie i odejmowanie, to poprawny wynik dostaniemy, wykonując działania od lewej do prawej.*

Od około 30 lat prowadzę wykłady z matematyki na kierunku *Edukacja początkowa* (studia magisterskie na Wydziale Pedagogicznym Uniwersytetu Warszawskiego). Studentki – to przyszłe nauczycielki klas I–III. Będą uczyć czytania, pisania, arytmetyki, śpiewu itd. Otóż kilka lat temu zaobserwowałem bardzo niepokojące zjawisko: sporo studentek tego kierunku błędnie formułowało na egzaminie regułę kolejności działań, twierdząc, że

> (!!) *Najpierw wykonuje się dodawanie, a potem odejmowanie.*

Zapewniały przy tym, że tak je uczono w szkole. Słysząc taką regułę, zazwyczaj podaję zdającej osobie jakiś przykład i proszę o wykonanie obliczenia. Okazuje się często, że taka osoba wykonuje rachunek poprawnie (a więc jej błąd dotyczy jedynie werbalnego sformułowania ogólnej reguły). Parokrotnie zdarzyło się jednak (i to w różnych latach), że zdająca studentka błędnie wykonała obliczenie wymagane już od uczniów II klasy, pisząc:

$$20-8+2 = 10$$

i twierdząc, że jako pierwsze należy wykonać tu dodawanie $8+2$. Odpowiada to błędnej interpretacji $20-8+2$ jako $20-(8+2)$, poprawny zaś rachunek odpowiada wyrażeniu $(20-8)+2$.

Szczególnie niepokojące jest to, że tego typu błędy okazały się bardzo uporczywe. Były popełniane przez kilka lat z rzędu pomimo, że na wykładach coraz dobitniej podkreślałem fałszywość sformułowania (!!). Niektóre z tych studentek dostałyby ocenę dobrą lub bardzo dobrą, gdyby nie ów niefortunny błąd. Sytuacja powtarzała się co roku przez kilka lat; powtórzyła się także w przypadku studentek Akademii Pedagogiki Specjalnej, z którymi również miałem zajęcia. Czy nauczywszy się właściwych reguł na egzamin poprawkowy i skończywszy potem studia, osoby te nie zapomną ich potem i czy wcześniejsze przekonania nie okażą się silniejsze? Czy nie będą przekazywać ich następnym uczniom?

Nie potrafię rozstrzygnąć, czy tak je rzeczywiście uczono, czy im się tak tylko zdawało. Jedna ze studentek powiedziała mi na egzaminie, że ją w szkole uczono reguły (!!), ale na moich wykładach dowiedziała się, że od tego czasu matematycy zmienili regułę i teraz obowiązuje inna.

Poglądowo równość typu $20-(8+2) = 20-8-2$ można objaśniać, mówiąc, że „zabranie 8 i 2 jest równoważne zabraniu najpierw 8 i następnie zabraniu 2”.

Część studentek formułowała następującą, też błędną regułę:

> (??) *Jeśli nie ma nawiasów, to działania wykonuje się w następującej kolejności: mnożenie, dzielenie, dodawanie, odejmowanie.*

Usłyszawszy coś takiego, zawsze staram się wyjaśnić, czy to jest jedynie niefortunny skrót myślowy, czy też studentka rzeczywiście sądzi, że należy wykonywać: najpierw mnożenie, następnie dzielenie, potem dodawanie i na koniec odejmowanie. Innymi słowy, chodzi o to, czy może (??) jest wynikiem niestarannego formułowania reguły (*). Jeśli do (??) dopisze się jedno „potem”, otrzymuje się regułę bliską poprawnej; jeśli dopisze się „potem” trzykrotnie, reguła staje się definitywnie błędna.

Przed reformami programów z lat osiemdziesiątych nauczyciele uczyli kolejności wykonywania działań na przykładach, formułując wiele szczegółowych reguł, dostosowanych do poszczególnych przypadków. Być może przyczyną obserwowanych błędów było podawanie w podręcznikach zwięzłej pojedynczej reguły typu (*), zbyt zawiłej, obejmującej od razu wszystkie przypadki, co zdegenerowało się później do błędnej reguły (??).

Warto tu zasygnalizować innego typu trudność, zwłaszcza w nauczaniu początkowym, która wynika z interpretowania kolejności działań wyłącznie w kategoriach: „musisz” i „nie wolno”. Niektóre studentki mówiły: skoro reguła podaje, że dodawanie i odejmowanie zawsze wykonuje się od lewej do prawej, to rachunek np.

$$38+9+26-6 = 38+9+20;$$

jest niepoprawny. Przecież zgodnie z regułą powinno zacząć się od strony lewej, tj. od $38+9$, a nie od $26-6$. Mylący fragment ogólnej reguły: „zawsze zaczynając od lewej strony wyrażenia”, z zaakcentowanym słowem „zawsze”, można znaleźć w [5], s. 30, ale i bez tego słowa zwrot typu: „wykonujemy” często bywa interpretowany mocniej, jako *należy wykonać*.

Zastanawiałem się, jak można wyjaśnić subtelności reguły (*). Czy argumentować, że reguła kolejności wykonywania działań podaje jedynie *definicję wartości wyrażenia arytmetycznego* i nie znaczy to bynajmniej, że wszelka inna kolejność jest niepoprawna, bowiem z jednej strony obliczenie oparte na (*) musi dać poprawny wynik, ale ten sam wynik można nieraz uzyskać, stosując inną kolejność, której poprawność wynika z odpowiednich własności działań? Tego typu wyjaśnienia bywają nieskuteczne, gdyż odwołują się do dość wyrafinowanego rozumienia ogólnego sensu wyrażenia arytmetycznego i jego wartości. Nie jest łatwo wyjaśnić to osobie ujmującej matematykę jako system *nakazów i zakazów*. Uczeń na ogół pojmuje takie reguły w kategoriach czynności, np. najpierw mnóż, potem dodawaj. Jest tu jednoznaczne polecenie: „pomnóż”, toteż uczeń mnoży, również wówczas, gdy jest to niepotrzebne, a nieraz prowadzi to w niewłaściwym kierunku. Nie jest jednak jasne, jak można by w podręczniku dla klasy II uniknąć takiego czynnościowego sformułowania reguł kolejności działań.

Sztywność rozumienia reguł kolejności ujawniła się kiedyś szczególnie, gdy zdający dostał następujące pytanie. *Uczeń napisał w zeszycie*: $8 \cdot (4+3) = 8 \cdot 4 + 8 \cdot 3$. *Czy to jest poprawne*?

Dostałem odpowiedź, że tu jest błąd, bo zgodnie z regułą najpierw należy wykonać działanie w nawiasie, tzn. uczeń powinien był napisać $8 \cdot (4+3) = 8 \cdot 7$.

Jakkolwiek kolejność „najpierw dodawanie, potem odejmowanie” jest jawnie fałszywa, nie jest łatwo podać przykłady uzmysławiające, że ewentualna modyfikacja w postaci odwrotnej kolejności: „najpierw odejmowanie, potem dodawanie” też nie byłaby poprawna. Z pewnością nie mogłaby być podana w klasach I–III, bowiem choć wynik obliczenia

$$10+5-7 = 10+(5-7) = 8$$

jest poprawny, lecz po drodze pojawia się tu liczba ujemna –2.

Osoba znająca rachunek na liczbach ujemnych może widzieć tego typu zagadnienia szerzej i stosować reguły, których nie formułuje się w nauczaniu początkowym, bowiem byłoby to zbyt zawiłe i niepotrzebne. Na przykład, przemienność dodawania gwarantuje, że

$$20-7-4 = 20-4-7,$$

bowiem

$$20 - 7 - 4 = 20 + (-7) + (-4) =$$
$$= 20 + (-4) + (-7) = 20 - 4 - 7.$$

W takiej sytuacji można zresztą odwoływać się do intuicji: mamy 20 (czegoś); wszystko jedno, czy najpierw zabierzemy 7, a potem 4, czy też najpierw zabierzemy 4, a potem 7, łącznie zabierzemy 11.

Po tych uwagach dotyczących działań dodawania i odejmowania, przejdźmy do poruszonej na wstępie kwestii *kolejności działań w sytuacji, gdy nie ma nawiasów i są jedynie działania mnożenia i dzielenia*. W praktyce takie sytuacje nie zdarzają się często, bowiem zazwyczaj na nieco bardziej zaawansowanym poziomie nie używa się znaku dzielenia „:”, lecz stosuje się zapis ułamkowy o dobrze znanych i ściśle określonych regułach.

Dość naturalny jest postulat, że jeśli chcemy zaproponować jakąś regułę, dotycząca kolejności działań w przypadku pary mnożenie-dzielenie, to powinna być ona analogiczna do reguły dotyczącej pary dodawanie-odejmowanie, a więc (jeśli nie ma nawiasów i innych działań) należałoby przyjąć, że *mnożenie i dzielenie wykonuje się w kolejności od lewej do prawej*. Tak więc np. $24 : 3 \cdot 4 = 32$. Taką kolejność podaje m.in. reguła w [5].

Jednakże wypowiedź Joanny Brody („Matematyka” 4/2007, s. 251) pokazuje, że sytuacja bynajmniej nie jest taka prosta. Istotna okazuje się też wizualna budowa wyrażenia. Praktyka pokazuje, że inaczej są traktowane sytuacje, gdzie mnożenie zapisane jest za pomocą kropki, a inaczej gdy kropki nie ma.

Na przykład w [3], s. 26, podane jest przekształcenie:

$$b^2\varepsilon\,/2 : b^2\,/\,2 = \varepsilon.$$

Dzielenie nie jest tu wykonywane od lewej do prawej, ale nikt nie ma wątpliwości, jak interpretować to wyrażenie z uwagi na użycie dwóch różnych znaków dzielenia: dwukropka : i skośnej kreski /. Można to też zapisać w postaci

$$\frac{b^2\varepsilon}{2} : \frac{b^2}{2} = \varepsilon.$$

W [1], s. 52, wśród zadań danych uczniom znajdujemy $8x^2 : 2x$, przy czym zarówno dla badanych uczniów jak i dla specjalistów od nauczania algebry, którzy czytali opis tych badań, nie ulegało wątpliwości, że chodzi o dzielenie $8x^2 : (2x)$.

Czytelnik może spróbować przemyśleć swoje odczucia, porównując następujące przykłady: $24x : yz$ oraz $24x : y \cdot z$.

Dodatkową trudnością jednolitego wysłowienia jednej, w pełni ogólnej reguły jest również to, że nie da się wykonać działania typu $\sqrt{3}$ lub $\sqrt[3]{4}$. W szczególności więc reguła (*) musi być uzupełniona wyjaśnieniem, że chodzi o te pierwiastki, w których wynik jest liczbą całkowitą.

Podsumowując te wywody, skłaniam się ku poglądowi, że kwestii kolejności działań w sytuacji mnożenia i dzielenia (bez nawiasów) nie należy definitywnie rozstrzygać poprzez podanie jakiejś jednej ogólnej reguły, która miałaby obejmować wszelkie możliwe przypadki i była zarazem zgodna z praktyką zapisu w publikacjach matematycznych.

Aby zilustrować, jak mogłaby brzmieć taka reguła, zacytuję ujęcie zaczerpnięte z [2] (s. 91):

Hierarchia działań
Poziom 1: dodawanie i odejmowanie,
Poziom 2: mnożenie i dzielenie,
Poziom 3: potęgowanie i pierwiastkowanie.

Umowy syntaktyczne[1]
(a) *Operacje wyższego rzędu mają pierwszeństwo przed operacjami niższego rzędu,*

(b) *Jeżeli w jakimś wyrażeniu sąsiadujące działania należą do tego samego poziomu hierarchii, to jako pierwsze wykonuje się działanie znajdujące się po lewej.*

Omawialiśmy regułę (b) w przypadku poziomów 1 i 2. Okazuje się, że działania należące do poziomu 3 sprawiają specyficzne trudności, gdyż ich układ graficzny jest inny. W zapisie pierwiastków i potęg mogą tkwić ukryte nawiasy. Mianowicie a^w to $a^{(w)}$ oraz $\sqrt{w}$ to $\sqrt{(w)}$ dla dowolnego wyrażenia w. Zakres działania tych niewidzialnych nawiasów jest wyznaczony bądź przez zakres małych cyferek

1 Określenie „umowy syntaktyczne” w powyższej regule nawiązuje do *syntaktyki*, dziedziny teorii systemów znakowych (*semiotyki*) badającej formalne zależności między znakami. Takimi systemami znakowymi są języki etniczne (np. język polski, wtedy słowa „syntaktyka” i „składnia” są synonimami), języki programowania komputerów oraz język tekstów matematycznych, w szczególności budowa wzorów matematycznych. Syntaktyka nie zajmuje się natomiast znaczeniem, sensem rozpatrywanych znaków (co jest to przedmiotem semantyki). Terminy „syntaktyczny” i „semantyczny” pojawiają się coraz częściej w publikacjach naukowych z dydaktyki matematyki.

w wykładniku potęgi (innymi słowy: „najpierw wykonaj działania w wykładniku”), bądź przez długość poziomej kreski w znaku pierwiastka.

Wiadomo, że potęgowanie nie jest działaniem łącznym, np.

$$3^{(3^3)} = 3^{27}, \quad (3^3)^3 = 27^3 = 3^9.$$

Zgodnie z regułą $a^w = a^{(w)}$ zapis 3^{3^3} interpretujemy jako $3^{(3^3)}$. Innymi słowy, w 3^{3^3} działania wykonuje się od prawej do lewej! W przypadku poziomu 3 reguła (b) jest więc błędna (wbrew temu, co jest podane w [2]). Podobnie można też interpretować następujące równości:

$$\sqrt{2^5} \text{ to } \sqrt{(2^5)} \quad \text{oraz} \quad 2^{\sqrt{5}} \text{ to } 2^{(\sqrt{5})}.$$

Również reguła (a) w przypadku działań poziomu 3 wymaga odpowiedniej interpretacji. Sformułowanie „gdy nie ma nawiasów, to potęgowanie wykonuje się przed mnożeniem” dotyczy sytuacji typu $7 \cdot 5^4$, ale jest nieodpowiednie przy $7^{5 \cdot 4}$, bowiem

$$7^{5 \cdot 4} \text{ to } 7^{(5 \cdot 4)}.$$

Ewentualna reguła „najpierw pierwiastkuj, potem mnóż” dotyczy sytuacji typu $\sqrt{4} \cdot 3$, ale nie odpowiada sytuacji $\sqrt{4 \cdot 3}$, bowiem

$$\sqrt{4 \cdot 3} \text{ to } \sqrt{(4 \cdot 3)}.$$

❑

ZBIGNIEW SEMADENI

profesor Instytutu Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, a także autor podręczników nauczania początkowego matematyki

LITERATURA

[1] A. Demby, *Typy procedur algebraicznych, stosowanych przez uczniów w wieku 13–15 lat*, „Dydaktyka Matematyki” 22 (2000), s. 45–74.

[2] D. Kirshner, *The structural algebra option revisited*, w: R. Sutherland et al. (red.), *Perspectives on School Algebra*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 2001, s. 83–98.

[3] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN Warszawa, 1947.

[4] A. Mostowski, *Logika matematyczna*, PWN, Warszawa, 1948.

[5] W. Zawadowski, *Matematyka 6*, WSiP, 1986.

332 ⟵ **Przekorne trójkąty** ⟶ 355

Ad 1) Nie, nie jest to możliwe. Istotnie, z tw. sinusów mamy $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ (gdzie R jest długością promienia okręgu opisanego na naszym trójkącie). Z warunku $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ wynika zatem, że $c = 2R$, to zaś oznacza, że $\gamma = 90°$ co przeczy założeniu, że nasz trójkąt nie jest prostokątny.

Ad 2) Tak, istnieje taki trójkąt. By go znaleźć, skorzystamy z tw. cosinusów i założonego warunku $\cos\alpha = \frac{a}{c}$. Mamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{a}{c} = b^2 + c^2 - 2ab.$$

Jeżeli przyjmiemy teraz $a = 4$ i $b = 5$ to $c = \sqrt{31}$. Jak łatwo sprawdzić, trójkąt o bokach długości $4, 5, \sqrt{31}$ spełnia warunki zadania.

◆ ◆ ◆

A czy możliwe jest, by:

3) $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos\beta = \frac{b}{c}$?