Wykorzystać *niezaplanowane sytuacje* 1

Niektóre błędy lub pytania uczniów są bardzo cenne z dydaktycznego punktu widzenia.

AGNIESZKA ORZESZEK

W piątym numerze „Matematyki” (2007) ukazały się dwa artykuły ([1], [2]), słusznie akcentujące potrzebę kształtowania elementarnych zasad wnioskowania i korzystania z okazji dydaktycznych, stwarzanych przez naszych uczniów. Rzeczywiście, na lekcjach matematyki co jakiś czas pojawiają się niezaplanowane przez nauczycieli, małe matematyczne niespodzianki. Są to na przykład dodatkowe pytania uczniów, wykraczające poza aktualnie omawiane zagadnienie, nietypowe rozwiązania zadań oraz najróżniejsze błędy uczniowskie. Zofia Krygowska pięknie określała tego typu sytuacje jako „błogosławiony błąd”.

Na ogół reagujemy na nie natychmiast, udzielając krótkich, autorytatywnych wyjaśnień i nie wracamy więcej do wywołanego nagle przez uczniów problemu; w jakimś stopniu jest to zrozumiałe przy wciąż niewystarczającej liczbie godzin matematyki w liceum, która mocno sprzyja algorytmizacji nauczania i metodzie „podającej”.

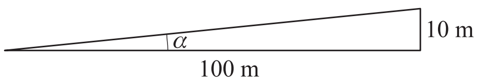
Tymczasem niektóre z takich zdarzeń są bardzo cenne z dydaktycznego punktu widzenia. Dają się wykorzystać jako punkt wyjścia do prostych badań, analiz, wnioskowania, kształcenia rozumowań matematycznych uczniów, a także ich aktywnej, poszukującej postawy. Tworzą kapitalną sytuację dydaktyczną – „starter” do kolejnych kształcących metodycznych zabiegów.

Chciałabym podać przykłady takich sytuacji, które zdarzyły mi się w liceum, w roku szkolnym 2006/2007.

Sytuacja pierwsza

Uczniowie klasy I poznali definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i ćwiczyli ich stosowanie w zadaniach. Na jednej z pierwszych lekcji wyjaśniono pojęcie nachylenia stoków gór, dachów, dróg itp. według podręcznika [3]. Oto ta definicja:

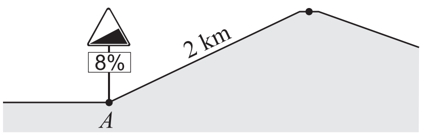
Nachylenie stoków gór, schodów i dachów domów często podaje się w procentach. Na przykład znak drogowy przedstawiony na zdjęciu ostrzega przed stromym podjazdem, którego nachylenie wynosi 10%.



Nachylenie 10% oznacza, że tangens kąta nachylenia drogi do poziomu wynosi 0,10.

Następnie uczniowie rozwiązywali następujące zadanie (zadanie 1c, s. 309, [3]):

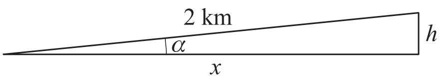
! Jaka jest różnica wysokości między szczytem wzniesienia a punktem A?



Oto dwa różne rozwiązania uczniów, prowadzące do tej samej odpowiedzi.

Rozwiązanie ucznia A

$$\mathrm{tg}\alpha = 8\% = 0{,}08 = \frac{2}{25}$$



$$\frac{2}{25} = \frac{h}{x} \quad \text{i} \quad h^2 + x^2 = 2^2$$

$$x = \frac{25h}{2} \quad \text{i} \quad h^2 + x^2 = 2^2$$

$$h^2 + \left(\frac{25h}{2}\right)^2 = 4$$

$$4h^2 + 625h^2 = 16$$

$$h^2 = \frac{16}{629}$$

$$h = \sqrt{\frac{16}{629}} \approx 0{,}15949\,[\mathrm{km}] \approx 160\,[\mathrm{m}].$$

Odp. Około 160 metrów.

Rozwiązanie ucznia B

$$\frac{h}{2} = 0{,}08$$

$$h = 0{,}16 \text{ km} = 160 \text{ m}$$

Odp. Około 160 metrów.

Jak skomentować zaistniałą sytuację uczniom? **W jakim celu i jak** ją wykorzystać na tej lub następnej lekcji?

□ Wersja 1. Nauczyciel ogranicza się do komentarza: *Uczeń B źle zdefiniował funkcję tgα, pomylił ją z sinα, jego rozumowanie jest nieprawidłowe*, po czym przechodzi do następnych zadań, gdyż podczas tej lekcji ćwiczy się prawidłowe stosowanie funkcji trygonometrycznych w zadaniach.

□ Wersja 2. Nauczyciel informuje: *Dla małych kątów α wartość tgα jest w przybliżeniu równa sinα, dlatego można zaakceptować rozwiązanie ucznia B, który powinien jednak napisać odpowiedni komentarz*, po czym przechodzi do rozwiązywania następnych zadań.

Te hipotetyczne, uproszczone wersje wydarzeń są przykładem stereotypu i być może nadal prawdopodobne w szkole. Obie nie wykorzystują potencjału uczniów ani okazji, by ich matematycznie uaktywnić. Przyjrzyjmy się wersji 3. Wykorzystaniu sytuacji poświęcamy następną lekcję.

□ Wersja 3. Nauczyciel przygotowuje kilka zabiegów dydaktycznych.

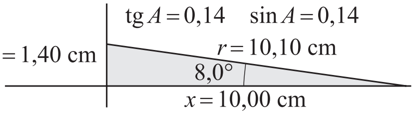
1. **Porównanie rozwiązań A oraz B.** Rozwiązania A oraz B są napisane na tablicy lub wyświetlone na ekranie.

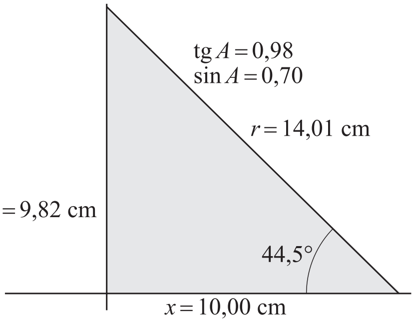
Wygląda na to, że jeśli uczeń B odwoływał się do definicji nachylenia drogi oraz funkcji trygonometrycznych, to zrobił błąd, bo zastosował tu niewłaściwą funkcję. Co o tym sądzicie? – dyskusja.

2. ***Dlaczego*** *jednak B uzyskał dobry wynik? Czy to przypadek?* Możemy zapytać ucznia B, czy zastosował swój pomysł przez pomyłkę, czy celowo użył innej funkcji? Jeśli przez pomyłkę, umiemy to skomentować. Jeśli celowo, to pochwalimy ucznia, czyż nie?

Bez względu na przyczyny, **wykorzystamy** tę sytuację, by nauczyć uczniów czegoś nowego podczas tej lekcji. **Czego**?

3. **Porównanie wartości funkcji sinus oraz tangens tego samego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.** Nauczyciel projektuje prostą komputerową animację trójkąta prostokątnego (na przykład w programie CABRI 2*). Złapanie „myszą" za górny wierzchołek trójkąta powoduje zmiany badanego kąta ostrego A. Długość przyprostokątnej x jest stała, równa na przykład 10 cm. Program oblicza wartości funkcji $\mathrm{tg}\,A$ oraz $\sin A$, można je porównać i odczytać, dla jakiego kąta A są w przybliżeniu równe.





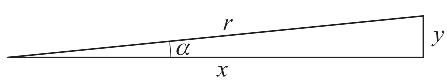
Nauczyciel może to zademonstrować na ekranie, wykorzystując projektor multimedialny, lub pozwolić uczniom na samodzielne „badanie" trójkąta na komputerach. Uczniowie odpowiadają na kluczowe pytanie: ***dlaczego*** *dla małych kątów A zachodzi własność sin A ≈ tg A?* Formułują wniosek: *Dla małych kątów A przyprostokątna przyległa do A ma zbliżoną długość do przeciwprostokątnej, dlatego sin A ≈ tg A.*

4. **Co oznacza określenie „dla małych kątów?"** Z jakiego przedziału? Jakiego rzędu są wartości funkcji sinus i tangens dla tych kątów? Jaki jest błąd przybliżenia w przypadku, gdy $\sin A \approx \mathrm{tg}\,A$? Warto podsumować „zakres" stosowania odkrytej własności i zapisać wniosek: *Możemy przyjąć, że jeśli* $\alpha \in (0°, 9°)$, *to* $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha$. *Wartości tych funkcji są wtedy większe od* 0 *i mniejsze od około* 0,16. Błąd bezwzględny nie przekracza 0,01. Warto dodać, że fizycy do obliczeń używają odkrytej przez nas własności dla kątów mniejszych od około 9°. Porównajmy jeszcze w tablicach wartości obu funkcji w określonym przedziale miar kątów.

5. **Czy wobec tego moglibyśmy zastosować tę własność do rozwiązania naszego zadania?** Uczniowie bez trudu powiedzą: *Nachylenie wynosi 8%, to mniej niż* 0,16, *zatem możemy zastosować powyższą własność*. Poprawmy zapis rozwiązania zadania ucznia B: $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}08$ zatem $\alpha \in (0°, 9°)$, wtedy $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha$, stąd $\sin\alpha \approx 0{,}08$. Otrzymujemy $h \approx 0{,}16$ km ≈ 160 m. Odp. Około 160 metrów.

6. **Powrót do definicji.** Wróćmy do definicji funkcji tangens i sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Czy sformułowaną wyżej własność można było wywnioskować z tych definicji? Porównujemy wzory: *Który ułamek jest większy*? *Który szybciej rośnie*?

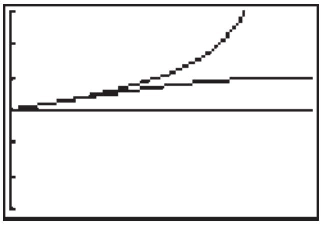


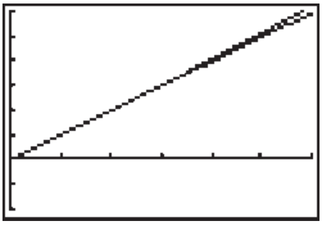
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x},\quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

---

* Jeżeli nie mamy komputera, możemy posłużyć się po prostu tablicami.

7. **Wykresy funkcji w przedziale (0°, 9°).** Pokażmy uczniom wykresy obu funkcji w przedziale (0°, 9°), np. wyświetlając je na kalkulatorze graficznym. Czy widać, jak „zachowują" się wykresy dla małych kątów? To cenne dydaktycznie, chcemy, aby pod koniec nauki w liceum uczeń potrafił szybko i swobodnie przechodzić z języka algebry na język funkcji, i interpretacje geometryczne.



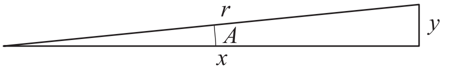


8. **„Przedłużenie" problemu.** Pytamy uczniów: *Czy moglibyśmy „przedłużyć" ten problem*? *Jak*? Oczekujemy odpowiedzi uczniów: *Czy podobna własność zachodzi dla innych funkcji trygonometrycznych*? W klasie, w której stosujemy podobne zabiegi dydaktyczne, takie pytanie uczniów pojawia się z reguły dużo szybciej, nie prowokowane przez nauczyciela. Można zadać ten problem do zbadania w domu: *Sformułuj i zapisz wniosek z badań. Uzasadnij, dlaczego zachodzi odkryta własność*.

9. **Podsumujmy: zalety i wady** rozwiązań ucznia A oraz B. Spytajmy uczniów: *Czy i na jakich warunkach dopuścisz rozwiązanie ucznia B*? *Czy pozwolisz mu je stosować na maturze*? W tej krótkiej dyskusji podkreślamy znaczenie zapisu niezbędnych komentarzy w rozwiązaniu zadania. A swoją drogą ciekawe, jak zareagowaliby egzaminatorzy sprawdzając na maturze takie „inżynierskie" ujęcie zadań matematycznych?

Opisane wyżej etapy lekcji odbywały się szybko i sprawnie w pracowni multimedialnej, wyposażonej w komputery oraz projektor multimedialny. Zademonstrowałam uczniom również małą tabelę w arkuszu kalkulacyjnym, której analiza prowadziła do tych samych wniosków. To również dobre i łatwo dostępne narzędzie dydaktyczne, warto z niego korzystać.

y – przyprostokątna naprzeciw kąta A
x – przyprostokątna przy kącie A
r – przeciwprostokątna



x	y	r	$\sin A = \frac{y}{r}$	$\operatorname{tg} A = \frac{y}{x}$	$\operatorname{tg} A - \sin A$	$\operatorname{tg} A - \sin A$ (zaokrąglenie)
10	0,1	10,00049999	0,0099995	0,01	0,000000499963	0,0000
10	0,2	10,0019998	0,019996	0,02	0,000003998800	0,0000
10	0,3	10,00449899	0,02998651	0,03	0,000013490894	0,0000
10	0,4	10,0079968	0,03996804	0,04	0,000031961651	0,0000
10	0,5	10,0124922	0,04993762	0,05	0,000062383056	0,0001
10	0,6	10,01798383	0,05989229	0,06	0,000107709272	0,0001
10	0,7	10,02447006	0,06982913	0,07	0,000170872300	0,0002
10	0,8	10,03194896	0,07974522	0,08	0,000254777717	0,0003
10	9	13,45362405	0,66896473	0,9	0,231035268378	0,2310
10	10	14,14213562	0,70710678	1	0,292893218813	0,2929

Oczywiście można polemizować, czy warto do tego dość prostego zagadnienia sięgać po narzędzia typu kalkulatory, czy komputery. Może wystarczy tylko przeanalizować definicję obu funkcji (etap 6)? Zapewne decyzja zależy od poziomu klasy i możliwości nauczyciela. Opisana i przeprowadzona przeze mnie propozycja lekcji **podpowiada moim uczniom, jak można poszukiwać rozwiązań, oswaja z badaniem problemu, w pewnym sensie pokazuje jak można z przyjemnością „uprawiać" matematykę** – zagadnienie nie było pojęciowo trudne, ale dość nietypowe, za to dobre do nauki pewnego stylu matematycznych rozumowań i aktywnej postawy.

Nie przepadam za nadmiernym eksponowaniem „edukacyjnej nomenklatury", jednak w tym przypadku warto chyba wypisać cele – hasła mojej lekcji, bo rzeczywiście w niej wystąpiły:

- odkrycie zależności (obserwacja, wnioskowanie, stawianie hipotezy) i uzasadnienie jej;
- uzasadnienie, dlaczego własność jest prawdziwa dla małych kątów, a dla większych nie (obserwacja i korzystanie z definicji, logiczne wnioskowanie);
- problem wielkości błędu przybliżenia, jaki błąd akceptujemy przy tym przybliżeniu;
- badanie i uzasadnianie monotoniczności tych funkcji, także tempa zmian;
- analizowanie wykresów tych funkcji w przedziale adekwatnym do realizowanego materiału, czyli dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- przedłużenie problemu;
- problem prawidłowego zapisu zadania przez ucznia B; jakim zapisem przekonać nauczyciela, że B rozwiązał zadanie prawidłowo?;
- stale akcentowana aktywna postawa badacza i stałe pytanie „dlaczego";
- spójne i naturalne przechodzenie pomiędzy wątkami matematycznymi – dodanie nowego tematu lekcji (jakiego?) do tzw. rozkładu materiału, temat nieplanowany wcześniej, ale spójny z wymaganymi zagadnieniami (na przykład z monotonicznością);
- problem akceptacji rozwiązania nietypowego, ujęcie „inżynierskie", w konfrontacji z zadaniem tradycyjnym oraz tradycyjnym podejściem nauczyciela i egzaminatora. ❑

AGNIESZKA ORZESZEK
nauczycielka III LO w Gdyni

LITERATURA

[1] Jan Kraszewski, *Uzasadnij, że…*, „Matematyka" nr 5/2007.
[2] Danuta Zaremba, *Obliczam, więc myślę*, „Matematyka" nr 5/2007.
[3] *Podręcznik. Matematyka 1, zakres podstawowy z rozszerzeniem*, GWO, 2002, s. 292.

ŚREDNIE ŚREDNICH

➡ 478

Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Przypomnijmy dobrze znaną nierówność pomiędzy **średnią arytmetyczną** $\frac{a+b}{2}$ a **średnią geometryczną** $\sqrt{ab}$ tych liczb:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

Nasuwa się w tym momencie dość naturalne pytanie: *Co jest większe: średnia arytmetyczna średnich geometrycznych czy średnia geometryczna średnich arytmetycznych*?

nadesłał **Michał Kremzer**