

Poszukuj związków, twórz znaczenia

*Bo myśli moje nie są myślami waszymi
ani wasze drogi moimi drogami –
wyrocznia Pana.*

Iz 55:8

*Kiedy się tak zbierze jeden po drugim
związki, naturalnie rodzi się znaczenie.
A jak się zbierze dużo związków
znaczenie się pogłębia.*

Haruki Murakami, *Kafka nad morzem*,
Muza SA, Warszawa 2007.

■ MAREK PISARSKI

Wprowadzenie

Nasze matematyczne myślenie znaczenie odbiega od myślenia naszych uczniów. Czy ta oczywistość jest przez nas brana pod uwagę? W jaki sposób? Nasze myśli, dzięki wieloletniemu treningowi, są bogate w konteksty znaczeniowe. Myśli uczniów biegną ścieżkami tworzącymi, w porównaniu z naszymi, niezbyt rozbudowaną i mało używaną sieć połączeń. My widzimy nie tylko to, co bezpośrednio ukryte jest pod znakami napisanymi na tablicy. Rozpoznajemy jednocześnie, szybko i niezawodnie wszystkie możliwe drogi w gmatwaniu ścieżek prowadzących od znaczenia do znaczenia. Uczniowie te ścieżki dopiero tworzą wśród swoich własnych ścieżek, bardziej lub mniej związanych z pożąda-

nymi przez nas. Są jak osoby, które słabo znając miasto dochodzą do celu dziwnymi okrężnymi trasami. Pomijają najprostsze drogi lub gubią się i przy każdej okazji pytają o drogę. Widzą przy tym wyłącznie znaki. Celami w tej wędrówce nie są jednak znaki, są nimi znaczenia, a drogami do nich – związki.

Mówiąc bardzo ogólnie, najważniejsze w uczeniu się (nie tylko matematyki) oraz w rozwiązywaniu problemów (nie tylko matematycznych) jest szukanie związków i budowanie znaczeń. Można chyba powiedzieć, że w szkolnej matematyce związki i znaczenia same w sobie są ważniejsze niż wiadomości i umiejętności; niż wiedza w znaczeniu, jakie przypisują jej historycy czy biolodzy. W matematyce odkrywanie związków i tworzenie znaczeń jest umiejętnością kluczową, ale też szczególnie trudną do wykształcenia. Trudności polegają na tym, że zarówno te najważniejsze związki jak i najgłębsze znaczenia są i powinny być oderwane od konkretnych przedstawień i naszych praktycznych doświadczeń. Myślę, że chociaż są oderwane, to jednak w codziennych doświadczeniach bardzo przydatne.

Myślę także, że na żadnym innym przedmiocie nauczyciel nie doświadcza tak silnej pokusy, aby pomijać znaczenia używanych znaków, a związki między

kryjącymi się wśród nich znaczeniami przedstawiać przede wszystkim formalnie, jako czynności na samych tylko znakach. Rozwiązywanie zadań dość łatwo daje się sprowadzić do formalnego zapisu. Znaczenia stosowanych symboli i związki między pojęciami traktuje się jako coś oczywistego, co niejako samo podkłada się pod zapis.

W tym artykule chciałbym ukazać momenty własnych lekcji, w których czuję, że gubię to, co na matematyce najważniejsze. Zaprezentuję także na jednym przykładzie strategię postępowania, której celem jest szukanie i odbudowanie zatartych ścieżek między znaczeniami.

Ze szkolnego podwórka

Wszyscy potrafimy podawać podobne przykłady. Jesteśmy w klasie I LO. Często pojawia się problem, jak z wyrażenia typu $c = a \cdot b$ wyliczyć b . Najbardziej trafia do uczniów tłumaczenie: **trzeba podzielić obie strony przez a** , zupełnie niedostępne zaś jest takie: **podstaw za c , a i b jakieś liczby**, na przykład 12, 3 i 4, a potem zastanów się, jak z 12 i 3 otrzymasz 4. Poprowadzeni pójść tą drogą, ale sami wybiorą pierwsze wyjaśnienie. „Nie wymaga myślenia.”

Tego typu rozumowanie uczniów prowadzi do częstych pomyłek innego rodzaju. Niektórzy z nich, kiedy mnożą obie strony równości typu $c = a \cdot b$ przez liczbę, mnożą każdy czynnik po prawej stronie przez tę liczbę. Błąd ten pojawia się na tyle często, że w walce z nim staję się ekspertem. Na jakiś czas uczniowie zaakceptują narzuconą zasadę: **mnożymy tylko jeden z czynników (w przypadku sumy jednak mnożymy każdy składnik)**, ale za nic na świecie nie odważą się wejść w związki między liczbami i działaniami, obserwując je na najprostszych przykła-

dach falsyfikujących. Dopóki nie zdobędą się na ten ryzykowny wysiłek, dopóty nie zrozumieją, dlaczego się nie mnoży iloczynu tak, jak im się wydaje. Co więcej powołują się na nauczycieli z gimnazjum: „Pani tak nas uczyła” – wspominają.

Kiedy, będąc w ich wieku, uczyłem się rozwiązywania nierówności wymiernych

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0,$$

moja pani profesor wyjaśniała, że znak ilorazu dwóch wyrażeń jest taki sam jak znak iloczynu, więc zamiast dzielenia po lewej stronie możemy zapisać mnożenie (pamiętając o dziedzinie nierówności). Teraz moi znajomi licealiści w drugiej klasie dają sobie radę bezrefleksyjnym sposobem: **pomnóż obie strony nierówności przez kwadrat mianownika**. W wyrażeniu po lewej stronie znaku „<” zapewne nie dostrzegają już dzielenia. Nasuwa się pytanie: **Co się zmieniło od tamtych czasów w podejściu do związków i znaczeń?**

W ramach korzystania z lepszych wzorców metodycznych, proponuję więc moim uczniom refleksję nad znaczeniami tego, co piszą i staram się pomagać im dostrzegać związki między znaczeniami i same znaczenia w labiryntach związków.

Moje próby (niezbyt udane)

Wracamy do klasy I LO. Proponuję zastanawianie się nad tym, kiedy iloczyn dwóch liczb jest dodatni, a kiedy ujemny. Po opracowaniu kilku przykładów doprowadzam do konkluzji: **Aby iloczyn dwóch liczb był liczbą ujemną, jedna z nich musi być liczbą ujemną a druga dodatnią**. Jednak moi uczniowie (wszyscy, którzy dostrzegają jakieś związki między przykładami a wnioskiem) rozumieją to kluczowe zdanie tak: Jeśli znak nierówności jest taki: <, to w następnej linii muszą pojawić się znaki < i > oraz > i <.

Uczeń więc zapisał to, czego po nim oczekiwałem:

$$x(x-1) < 0$$

$$x < 0 \vee x-1 > 0 \quad \text{lub} \quad x > 0 \vee x-1 < 0$$

ale nie podłożył pod napis oczekiwanych przeze mnie znaczeń. Jego wysiłek intelektualny skoncentrował się na odróżnieniu powyższego zapisu od niemal identycznego, który pojawił się na tablicy obok:

$$x(x-1) > 0$$

$$x > 0 \vee x-1 > 0 \quad \text{lub} \quad x < 0 \vee x-1 < 0$$

Ja starałem się wyjaśnić znaczenie wyrażeń, oni szukali różnicy w kierunkach znaków nierówności. Rozwiązanie nierówności kwadratowych stało się czysto mechanicznym przedstawianiem znaczków według upraszczającego schematu. Zapis w zeszytach jest poprawny formalnie, lecz całkowicie pozbawiony znaczenia. Jest więc semantycznie pusty i jałowy z punktu widzenia moich celów. Jest zapisem bez sensu.

Na kartkówkach zbierałem żniwo takiego podejścia. Nie dziwiłem się. Przecież nie sposób zapamiętać te dwie spośród wielu kombinacji przynajmniej pięciu prawie identycznych symboli, nie rozumiejąc ich znaczenia!

Przesadzam? Może nie jest aż tak źle? Może właśnie trzeba, aby uczniowie zdobywali mechaniczne nawyki sortowania symboli i przyswajali symboliczne reguły, aż w rezultacie informacje te zaczną tworzyć w ich umysłach pożądane związki? Z czasem i z liczbą nowych związków nastąpi samoczynna organizacja tych związków w spójny system? Zanim to nastąpi, po prostu muszą stosować wzory (nie tylko z resztą te), nie dostrzegając znaczeń w tych czynnościach? Nie jestem przekonany.

Wydaje się, że w zadaniach, w których korzystamy ze wzorów, można się obejść bez znaczeń. Uzyskanie wyniku liczbowe-

go wymaga tylko wprawy we wstawianiu odpowiedniej liczby w odpowiednią pozycję wzoru. Reszta – to znajomość rachunków, ale też (uwaga!) związków między znakami współczynników a znakami odpowiednich iloczynów i liczb przeciwnych. Od związków więc trudno się uwolnić.

Podczas rozwiązywania równań kwadratowych pojawiają się błędy przy podstawieniu za *minus delta* liczby ujemnej; podobnie za *minus b*. Niektórzy dzielą przez *dwa a* we wzorze na x_1 i x_2 zapamiętują jako dzielenie przez *dwa a*, a to znaczy po prostu przez dwa. Można się też pogubić w stosowaniu innej kuriozalnej reguły z poprzednich etapów edukacji: **minus i minus dają plus**, przywoływanej niefrasobliwie zarówno podczas mnożenia, jak i dodawania liczb całkowitych, a także czasem w dowolnych innych sytuacjach.

Dylematy, strategie i kolejne próby (czasem udane)

Wielu nauczycieli uważa, że umiejętność obliczania pierwiastków równania kwadratowego (jako bardziej podstawowa) u znacznej części naszych licealistów musi i powinna wyprzedzać (nieraz bardzo) umiejętność wyprowadzania wzorów na pierwiastki ze związków między współczynnikami równania. Dobrze, ale czy musi wyprzedzać także zrozumienie, że taki związek w ogóle istnieje?

Myślę, że nie musi. Ponieważ nie przykładam znaczenia do mechanicznych rozwiązań równań kwadratowych i innych zadań, w których uczeń realizuje (nawet poprawnie) zadany mu algorytm, postanowiłem pokazać uczniom różne związki zachodzące między znaczeniami podczas obliczania pierwiastków równań kwadratowych. Chciałem, żeby te związki pomagały im też w rachunkach.

Początki były trudne. Musiałem uwzględnić nawyki i oczekiwanie uczniów oraz to, że siatka związków w ich umysłach przypomina sieć naszych autostrad.

Weźmy równania kwadratowe. Moja strategia była następująca:

1. Najpierw uczyć rozwiązywania równań kwadratowych bez *delty*. Około 6 godzin analizowania znaczeń. Zastanawianie się, jaką liczbę trzeba podnieść do kwadratu, aby otrzymać inną (warianty: ta inna to dodatnia, ujemna lub zero) i kiedy iloczyn dwóch liczb zapisanych dwumianami wynosi zero. Pytam, czy możemy rozpoznać czynniki, kiedy iloczyn nie jest równy zero i pokazuję, jak *zwinąć sumę* do kwadratu (to zadanie na „piątkę”), itp.

Efekty osiągam dość, przyznaję, mizerne, ale chodzi mi nie tyle o osiągnięcie celów dydaktycznych (gdybym je osiągał, nie byłoby już problemów z kolejnymi tematami), a raczej o przekazanie uczniom moich intencji i metody pracy. Przesłanie jest takie: **zależy mi przede wszystkim na waszym rozumieniu znaczeń i związków między nimi.**

2. Potem budowaliśmy równania kwadratowe w postaci ogólnej na podstawie zadania: *Suma dwóch liczb wynosi p , a ich iloczyn wynosi q . Jakie to liczby?* Uczniowie dostrzegali, że współczynniki p i q w równaniu kwadratowym $x^2 - px + q = 0$ są w prostym związku z jego rozwiązaniami (prostym, kiedy współczynnik przy x^2 wynosi 1). Na podstawie danych zadania budowali układ równań, a potem równanie kwadratowe, na podstawie zaś współczynników równania odgadywali jego rozwiązanie. To taki wstęp do wzorów Viete’a. Tu miałem już wyraźne efekty. Cieszyło mnie także to, że uczniowie angażowali się w odgadywanie rozwiązań.

3. Jeszcze później podałem wzory (bez wyprowadzenia) na deltę i pierwiastki,

z czasem też wzory Viete’a. Widziałem zadowolenie i ulgę malujące się na ich twarzach. Z wypiekami sprawdzali, że tymi wzorami można rozwiązać każde równanie kwadratowe, nawet $x^2 = 4$. Wielu zgłaszało pretensje „dlaczego dopiero teraz?”. Ta radość nie trwała jednak długo. Wystarczyło kilka zadań, aby stwierdzić, że jest w tych schematach rachunkowych sporo miejsc karkołomnych, gdzie liczne zaległości i brak wprawy stanowią bariery trudne do przebycia.

Wreszcie – kulminacyjny punkt tych wszystkich zabiegów:

4. Zebranie związków w całości ukazujące znaczenia. Układałem częściowe zadania w schematy, w których uczeń może (ale nie musi) dostrzec, jak pewne wyniki wiążą się ze sobą.

Oto prosty i reprezentatywny przykład takiego schematu.

 Spośród liczb: $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ wybierz dwie o różnych znakach i wpisz każdą pojedynczo do $\square$ i $\triangle$.

a) Oblicz sumę i iloczyn liczb wpisanych w $\square$ i $\triangle$.

$\text{suma} = \dots\dots\dots$ $\text{iloczyn} = \dots\dots\dots$

b) Wstaw *sumę* i *iloczyn* do równania:

$$x^2 - (\text{suma})x + \text{iloczyn} = 0.$$

c) Oblicz pierwiastki równania z punktu b).

d) Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania korzystając ze wzorów Viete’a.

e) Zapisz równanie z punktu b) w postaci iloczynowej.

Nie jest oczywiste dla moich uczniów (w każdym razie nie na początku), że pierwiastki obliczone ze wzorów używanych w punkcie c) to te same liczby, jakie wstawili do kwadratu i trójkąta. Nie wszyscy też zauważają od razu, że *suma* i *iloczyn*, wyliczone w punkcie a), muszą być takie same jak

$x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$, obliczone ze wzorów w punkcie d). Czuje, jaką trudność sprawia im także ułożenie postaci iloczynowej równania, mimo że za nimi wiele doświadczeń w rozwiązywaniu równań danych w tej postaci.

To, w jaki sposób zrealizowałem swoje cele poznawcze, oceniam jednak nie tyle po tym, jak sprawnie uczeń obliczy pierwiastki lub ich sumę, lecz po tym, czy potrafi zauważyć odpowiednie związki między liczbami, których używał i które otrzymał z rachunków. Sukcesem jest już to, że mnie o te związki pytają i że na ich podstawie poprawiają błędy rachunkowe.

Znaczenie

Ten przykład ilustruje moje podejście do zagadnienia związków i znaczeń na lekcjach matematyki. Cele, jakie sobie stawiam, wykraczają poza zwykłe przyswojenie materiału nauczania. Dotyczą podstawowych zasad pracy umysłowej i osiągnięcia kompetencji poznawczych. Poszukiwanie związków i znaczeń ma pomagać

rozwinąć nieco wachlarz strategii rozumowania, wyjść poza typowe schematy oparte na zapamiętywaniu faktów i realizowaniu zadanych algorytmów. Dobra pamięć zresztą korzysta ze związków i znaczeń.

Działy *równania kwadratowe i funkcje kwadratowe* to kopalnia zadań, z której przez odpowiednie łączenie znaczeń możemy wydobywać liczne związki, pomagać uczniom uświadamiać je sobie. Są inne, podobnie bogate, działy w programie nauczania.

Przekonujmy naszych uczniów (i siebie), że to właśnie szukanie związków i pogłębianie znaczeń jest ważnym celem uczenia się matematyki, przydatnym także poza szkołą. Może przekonamy w ten sposób większą liczbę uczniów, że warto się uczyć matematyki. $\square$

MAREK PISARSKI

pracownik Uniwersytetu w Białymstoku,
nauczyciel w prywatnym LO w Łodzi



Rozumując podobnie, jak poprzednio, dochodzimy do wniosku, że jedynymi kandydatami na rozwiązanie równania (2) są funkcje postaci $f(x) = Cx^n$. Sprawdzimy, które z nich istotnie spełniają to równanie. Mamy

$$(3) \quad Cy^n(x-1)^n - Cx^n(y-1)^n = C(x-y)^n.$$

Gdy $C = 0$, to równanie (3) jest spełnione, czyli funkcja $f(x) = 0$ jest rozwiązaniem równania (2). Załóżmy teraz, że $C \neq 0$. Wówczas dla $x = 2$ i $y = 4$ równanie (3) przyjmuje postać

$$4^n + 2^n \cdot 3^n = (-2)^n$$

lub równoważnie

$$2^n - 3^n = 1 \text{ lub } 2^n - 3^n = -1.$$

Oczywiście pierwsza z równości zajść nie może, zaś w drugim przypadku mamy

$$3^n - 2^n = 1 \Leftrightarrow n = 1$$

(dlaczego?), co jest sprzeczne z założeniem $n \geq 2$. Wobec tego **jedynym rozwiązaniem** równania (3) jest funkcja $f(x) = 0$.