

Kształcenie *umiejętności definiowania*



■ WITOLD PAJĄK

W pracy nauczyciela matematyki w szkole ważną rolę odgrywają definicje pojęć matematycznych. Niektóre z nich mają charakter skrót – potrzebnego i ułatwiającego dalsze porozumiewanie się w języku matematyki. Przykładami takich definicji – skrótów są na przykład: definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, oznaczenia $f(x)$, a_n . Są jednak i takie definicje, których charakter daleko wybiega poza tradycyjnie rozumiany skrót, na przykład: definicja symetrii osiowej, definicja wielomianu czy definicja funkcji.

W mojej pracy szkolnej w liceum ogólnokształcącym definicje odgrywają znaczącą rolę – są obiektem pracy nie tylko podczas ich wprowadzania, ale i wielokrotnie stają się ważnym kryterium rozstrzygającym wątpliwości. Przedstawiam kilka fragmentów lekcji dotyczących definiowania – definiowania rozumianego szeroko, ze szczególnym uwzględnieniem wprowadzenia uczniów w tę sztukę. Niektóre z prezentowanych przykładów¹ dotyczą pojęć już znanych uczniom, inne są nowe dla uczniów.

¹ Przedstawione przykłady mają charakter ćwiczeń.

Przykład 1 (klasa pierwsza LO) – Deltoid

Przy okazji rozważań dotyczących czworokątów uczniowie na pracę domową otrzymali polecenie sformułowania określeń deltoidu – popularnego „latawca”; mogli je sami wymyślić lub skorzystać z różnych źródeł. Na lekcji uczniowie zaprezentowali swoje propozycje. Oto te określenia w takiej formie, w jakiej przedstawili je uczniowie.

a) Deltoid to czworokąt o dwóch parach boków równych (pod warunkiem, że te równe boki nie są równoległe).

b) Deltoid jest to czworokąt (ani trapez, ani równoległobok), ma parami boki równe, przekątne przecinają się pod kątem prostym i ten punkt (przecięcia przekątnych) dzieli krótszą przekątną na połowy.

c) Deltoid to figura złożona z dwóch trójkątów równoramiennych o wspólnej podstawie.

d) Deltoid to figura złożona z dwóch trójkątów przystających o wspólnej podstawie.

e) Deltoid jest to czworokąt o prostopadłych, ale nie równych przekątnych.

f) Deltoid to czworokąt mający oś symetrii i prostopadłe przekątne.

g) Deltoid to czworokąt mający oś symetrii, będącą przekątną.

h) Deltoid to czworokąt o prostopadłych przekątnych, z których jedna się połowi.

i) Deltoid jest to czworokąt, który ma parami boki równe, przekątne przecinają się pod kątem prostym i ten punkt (przecięcia przekątnych) dzieli jedną z przekątnych na połowy.

j) Deltoid to czworokąt mający oś symetrii będącą przekątną i nie ma boków równoległych.

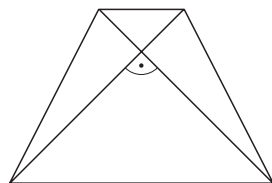
k) Deltoid to romb o dwóch sąsiednich bokach krótszych.

Rozmowa na lekcji dotyczyła weryfikacji podanych określeń: „które z nich mogłyby zostać definicjami?”. Uczniowie często bronili swoich pomysłów chcąc jednocześnie obalić inne propozycje. W ten sposób powstawały przykłady obiektów matematycznych spełniających określone uczniowskie opisy, a wcale nie będące deltoidami. Takie przykłady obalały te określenia jako poprawne definicje. Z drugiej strony, spostrzeżenie, iż romb (a więc i kwadrat) jest szczególnym przypadkiem deltoidu, wyeliminowało określenia wykluczające równość wszystkich boków lub równość przekątnych. Jednocześnie została utworzona grupa poprawnych definicji (często po modyfikacji). Jedynym problemem, który musieliśmy jeszcze w klasie ujednolicić, był problem wypukłości deltoidu (źródła książkowe różnie tę sprawę traktują). Przyjęcie, za *Encyklopedią Szkolną* umowy, że deltoid jest figurą wypukłą, spowodowało, iż do wszystkich zaakceptowanych określeń z wyjątkiem c), dodaliśmy warunek wypukłości. Kolejnym etapem lekcji było nakreślenie idei pokazywania równoważności przyjętych definicji – miały one raczej charakter pewnych wyjaśnień niż prawidłowych od początku do końca dowodów.

DODATEK REDAKCJI

l) Definicja k) musi być odrzucona od razu jako wewnętrznie sprzeczna – taka figura nie istnieje. Określenie to (podobnie jak potocznie używane, a bezsensowne określenie rombu jako „kopnięty kwadrat”) zawiera pewną intuicję, ale jest logicznie niepoprawne.

2) Jako ilustrację przytaczamy rysunek, pokazujący dlaczego należy odrzucić określenie f).



♦ ♦ ♦

Przykład 2. (klasa pierwsza LO) – Równoległoboki

Przed tą lekcją uczniowie zostali zobowiązani do przypomnienia sobie wiadomości dotyczących równoległoboków oraz własności figur, będących szczególnymi przypadkami równoległoboków. Lekcję rozpoczęliśmy od wypisywania na tablicy własności i związków dotyczących równoległoboków – tak jak dyktowali uczniowie. Następnie zadałem pytanie o przyjęcie takich własności, które mogłyby posłużyć za dobre warunki definicyjne. Uczniowie zaproponowali następujące określenia:

1. Równoległobok to czworokąt o połówiających się przekątnych.
2. Równoległobok to czworokąt o dwóch parach boków równych.
3. Równoległobok to czworokąt o dwóch parach boków równoległych.
4. Równoległobok to czworokąt o dwóch parach kątów przeciwległych równych.

5. Równoległobok to czworokąt o dwóch parach boków równych i równoległych.

6. Równoległobok to czworokąt środkowosymetryczny.

7. Równoległobok to czworokąt o połowiących się przekątnych i dwóch parach boków równych.

Zwróciliśmy uwagę, że w niektórych określeniach jest zbyt dużo, w innych – za mało informacji. W końcu zaakceptowaliśmy definicje 1), 3), 4), 6). Następnie zostały przeprowadzone rozumowania pokazujące równoważność tych definicji.

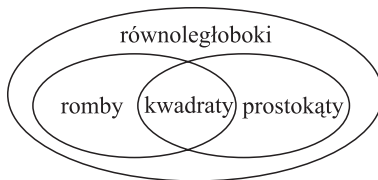
Zwróciłem również uwagę na to, że przyjmując jedną z definicji za obowiązującą, pozostałe należy traktować jako twierdzenia do udowodnienia. Kolejnym etapem lekcji było sporządzenie tabelki pokazującej zależności pomiędzy własnościami równoległoboku, rombu, prostokąta i kwadratu. Przyjęliśmy zasadę, że wpisujemy własności dla figury najbardziej ogólnej, czyli np. połowienie się przekątnych zostało wpisane jako własność tylko równoległoboku, gdyż wszystkie pozostałe figury również ją posiadają (gdyż też są równoległobokami). Oto powstała tabelka.

Równoległobok (istotny)	Romb (nie kwadrat)	Prostokąt (nie kwadrat)	Kwadrat
Połówiące się przekątne			
Dwie pary boków przeciwległych równych			
Dwie pary boków równoległych			
Śródkowosymetryczny			
Przeciwległe kąty o równych miarach			
Suma miar kątów sąsiednich wynosi 180°			
×	Ma cztery równe boki	×	Jest wielokątem foremnym.
×	×	Ma wszystkie kąty wewnętrzne równej miary	
×	Można w niego wpisać okrąg	×	Można na nim opisać i wpisać w niego okrąg
×	×	Można na nim opisać okrąg	
×	Przekątne zawierają się w dwusiecznych	×	
×	Ma dwie osie symetrii (zawierają przekątne)	×	
×	×	Ma dwie osie symetrii (przechodzą przez środki równoległych boków)	Ma cztery osie symetrii
×	×	Przekątne są równe	Ma równe prostopadłe przekątne.
×	Przekątne są prostopadłe	×	

Powyższa tabelka wskazała na zależności między figurami – wynikające wprost z definicji. Niektóre z nich stały się potem przedmiotem pewnych objaśnień, niektóre zaś zostały zaakceptowane na zasadzie intuicji. Dodatkowo został dołączony następujący diagram obrazujący własności badanych czworokątów: każda własność równoległoboku jest własnością prostokąta, rombu i kwadratu, każda własność rombu jest własnością kwadratu, każda własność prostokąta jest własnością kwadratu, ale są własności kwadratu, które tylko temu czworokątowi przysługują.



Zwróciłem w tym momencie uwagę na inny popularny diagram – pokazujący zależności definicyjne pomiędzy równoległobokami, rombami, prostokątami i kwadratami: każdy kwadrat to równoległobok, każdy romb to równoległobok, ale nie każdy równoległobok to romb, czy kwadrat.



Porównanie obu diagramów wskazało na „odwrócenie” zależności zbiorów figur i zbiorów własności figur.

Przykład 3. (klasa pierwsza LO) – Symetria środkowa

Symetria środkowa jest na ogół już dość dobrze znanym przekształceniem

w szkole licealnej. Uczniowie pamiętają je z gimnazjum. W związku z tym proponuję uczniom, aby podawali znane im określenia symetrii środkowej. Do najczęściej przytaczanych należą:

1. Obrazem dowolnego punktu X jest taki punkt X' , że punkt O jest środkiem odcinka XX' .

2. Punkty X i X' leżą po przeciwnych stronach danego punktu O , w tej samej od niego odległości.

3. Obrazem punktu X jest taki punkt X' , że punkty X , O , X' są współliniowe, punkt O leży pomiędzy punktami X i X' oraz $OX = OX'$.

Po tych definicjach proponuję jeszcze jedną: Obrazem punktu X jest taki punkt X' , że: $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{OX'}$.

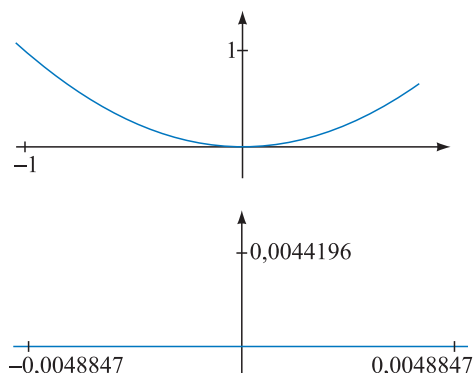
Zadanie uczniów polega na porównaniu tych określeń, odpowiedzeniu, czy są równoważne, a więc czy opisują dokładnie ten sam obiekt matematyczny. Do dalszych rozważań zaproponowałem przyjęcie definicji z wektorami.

Analogiczne ćwiczenie było wykonywane przy okazji symetrii osiowej.

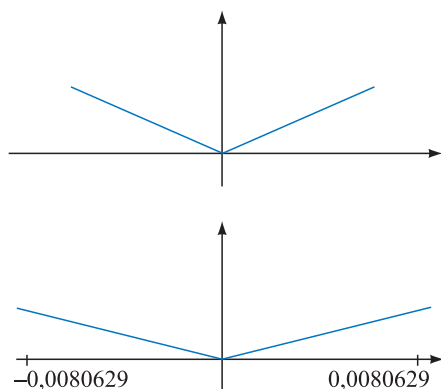
Przykład 4. (klasa trzecia LO, matematyka rozszerzona) – Pochodna funkcji

Przytoczone powyżej przykłady dotyczyły pojęć, które uczniowie mogli już znać lub rozumieć w sposób choćby intuicyjny. Pojęcie pochodnej funkcji należy traktować jako zupełnie nowe dla uczniów. Pracę z tym pojęciem rozpoczynam od nakreślenia idei geometrycznych. Wykorzystuję do realizacji tego celu komputer i odpowiednie oprogramowanie pozwalające rysować wykresy funkcji i dość dobrze je powiększać. Proponuję uczniom narysowanie dowolnej paraboli – powiększamy odpowiednią liczbę razy fragment wykresu

su „przy wierzchołku”; okazuje się, że w pewnym momencie uczniowie obserwują odcinek – funkcja „wyprostowała się”.



Później postępujemy analogicznie z funkcjami: $y = \sin x$ (w otoczeniu $\frac{\pi}{2}$), $y = \frac{1}{x}$ (w otoczeniu liczby 1), $y = |x|$ (w otoczeniu liczby 0). Ostatnia z funkcji „nie wyprostowała się” w badanym otoczeniu.



Wskazane przykłady pozwalają na dokonanie podziału funkcji w pewnych ich otoczeniach – na te, które przy odpowiednio dużym powiększeniu „dają się wyprostować” oraz na te, które „nie dają się wyprostować”. Ten „wyprostowany” fragment funkcji odzwierciedla styczną w określonym punkcie. Wówczas uczniowie formułują wniosek, że nie każda funkcja będzie miała styczną. Uzgadniamy potem

nazewnictwo: wykresy funkcji, które można przy odpowiednio dużym powiększeniu pewnego otoczenia punktu „wyprostować”, mają w tym punkcie styczną, a jej współczynnik kierunkowy to pochodna rozważanej funkcji w tym punkcie.

Kolejny etap rozważań dotyczy ujęcia algebraicznego – staram się z uczniami znaleźć rachunkowy odpowiednik powiększania funkcji. Najczęściej dochodzimy do wniosku, że to powiększanie powoduje uzyskanie otoczenia o bardzo małym promieniu – a to już krok do granicy w punkcie x_0 . Poważnym problemem dla uczniów jest ustalenie z czego należy taką granicę policzyć. Proponuję więc inne spojrzenie na styczną funkcji w punkcie x_0 – utwórmy prostą przechodzącą przez dwa punkty: nieruchomy $A(x_0, f(x_0))$ oraz „poruszający się” po wykresie $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$, gdzie h jest różną od zera liczbą. Uczniowie tworzą wzór prostej AB i kojarzą, że liczba h powinna być bardzo bliska liczbie zero – a więc docieramy do granicy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Wskazane oba ujęcia pochodnej funkcji można traktować jako alternatywne, jednak w moim przekonaniu o wiele bardziej właściwe jest traktowanie ich jako dopełniające i uzupełniające się.

Przykład 5. (wszystkie klasy LO) – Ćwiczenia sprawdzające

Definiowanie pojęć jest procesem długim, w którym istotną rolę musi również odgrywać kontrola (nie zawsze oceniana) stopnia opanowania i rozumienia pojęcia. Czyni się to np. sprawdzając przypadki szczególne, graniczne, poszukując błędów w definicji. Przedstawię kilka przykładowych ćwiczeń serwowanych moim uczniom w związku z definiowaniem pojęć

matematycznych. Występują one w różnych momentach pracy i w różnej formie. Tutaj je tylko grupuję i przytaczam.

1. Czy następujące określenie jest prawidłową definicją:

a) Funkcja homograficzna to iloraz dwóch funkcji liniowych niedających się sprowadzić do funkcji liniowej.

b) Kwadrat to czworokąt o połowiących się przekątnych, wszystkich bokach równej długości, wszystkich kątach o mierze 90° oraz równych przekątnych.

c) Styczna to prosta mająca dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji.

d) Pole figury płaskiej to liczba spełniająca określone warunki.

2. Jakie pojęcie zostało zdefiniowane w następujący sposób:

a) to część wspólna dwóch wzajemnie prostopadłych pasów tej samej szerokości.

b) to liczba, której rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe.

c) to uporządkowana para punktów.

d) to suma skończonej liczby jednomianów tej samej zmiennej.

3. Uzupełnij określenie, aby stało się prawidłową definicją:

a) Liczba wymierna to taka liczba, którą można zapisać w postaci zwykłego, w którym i to liczby całkowite oraz jest różny od zera.

b) Ciąg to taka, której dziedziną jest liczb

c) Sinusem dowolnego kąta nazywamy drugiej dowolnego punktu leżącego na ramieniu kąta (ale nie w) do odległości tego punktu od układu współrzędnych.

Przytoczone ćwiczenia czasami stawały się tematem lekcji powtórzeniowych, czasami były zadaniami na sprawdzianach. Nie były one łatwe dla uczniów, ale przyzwyczajały ich do traktowania definicji oraz definiowania jako nieodzownego komponentu rozumienia matematyki. $\square$

WITOLD PAJĄK

nauczyciel LO im. Stanisława Konarskiego
w Oświęcimiu



1. Nie. Gdyby bowiem liczby całkowite k, l, m, n były różnymi pierwiastkami wielomianu $W(x)$, to wtedy $W(x) = (x-k)(x-l)(x-m)(x-n)$. Ale to oznacza, że wyrazem wolnym wielomianu $W(x)$ jest liczba $klmn$. Zachodzi zatem równość $klmn = 2$, co jest niemożliwe (dlaczego?). Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

2. Tak, np. $W(x) = -x(x-6)^2(x-7)^2(x-8)^2$.

3. Tak. Funkcja $y = ax^{2k+1}$, $k \in \mathbf{N}$ jest nieparzysta, a wielomian $W(x)$ jest sumą takich funkcji. Wiemy zaś, że suma funkcji nieparzystych jest funkcją nieparzystą (dlaczego?).

4. Tak, np. wielomian $W(x) = x^4 - \sqrt{2}x^3 + \sqrt{2}x - 1$ ma pierwiastek $x = 1$.

5. Nie. Istotnie, mamy $W(x) = \left(x^{14} - 3x^7 + \frac{5}{2}\right) + \left(x^{10} - 3x^5 + \frac{5}{2}\right)$. Wiemy jednak, że dla każdego $t \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $t^2 - 3t + \frac{5}{2} > 0$, zatem $W(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$ (dlaczego?).