Po turecku

Kolejna porcja zadań przygotowawczych do matury z matematyki rodem z Turcji. Tym razem dominującym pojęciem jest dwusieczna kąta.

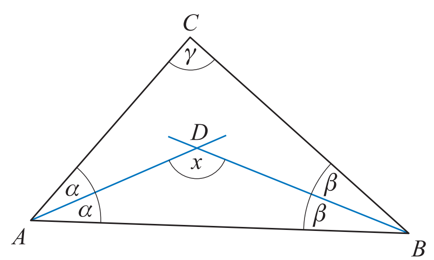
MONIKA BOLANOWSKA

Pocztówka z wakacji III

Oto kolejna lista zadań tureckich. Tym razem zaczynam ją od trzech prostych twierdzeń, wprowadzających zagadnienie, których dowody bazują na sumie kątów trójkąta. Są to proste rozumowania, dostępne niemal dla każdego ucznia. Później prezentuję zadania z zastosowaniem twierdzeń. Przy rozwiązywaniu zadań można co prawda obyć się bez tych twierdzeń, ale wówczas za każdym razem powtarzane będzie rozumowanie niemal identyczne z ich dowodami. Warto w związku z tym rozpocząć od udowodnienia początkowych twierdzeń, a zamieszczone po nich zadania rozwiązywać już tylko z odpowiednimi odwołaniami.

Geometrycznych zadań na dowodzenie, wymagających od ucznia konsekwentnego przeprowadzenia rozumowania z powoływaniem się na wcześniej poznane twierdzenia, jest w obecnym programie licealnym zatrważająco mało. Szkoda, bo właśnie na takich zadaniach najlepiej uczyło się dyscypliny w myśleniu i formułowania wniosków. Zamiarem tej listy jest przypomnienie „klimatu” pracy w dawnym stylu.

Twierdzenie 1 o kącie między dwusiecznymi kątów trójkąta.



Jeśli AD jest dwusieczną $\sphericalangle CAB$ i BD jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$, to

$$\sphericalangle ADB = 90^\circ + \frac{\sphericalangle ACB}{2},$$

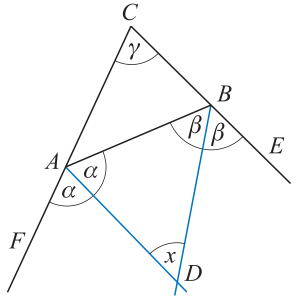
czyli $x = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

Szkic dowodu: Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku. Sumując kąty w trójkątach ABD i ABC otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+x=180^\circ \\ 2\alpha+2\beta+\gamma=180^\circ \end{cases}$$

z którego po wyeliminowaniu sumy $\alpha+\beta$ otrzymujemy tezę: $x = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

Twierdzenie 2 o kącie między dwusiecznymi kątów zewnętrznych trójkąta.



Jeśli AD jest dwusieczną $\sphericalangle FAB$ i BD jest dwusieczną $\sphericalangle ABE$, to

$$\sphericalangle ADB = 90^\circ - \frac{\sphericalangle ACB}{2},$$

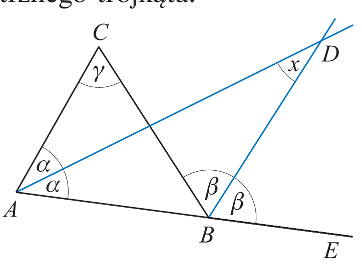
czyli $x = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

Szkic dowodu: Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku. Postępując tak samo jak w poprzednim dowodzie, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + x = 180^\circ \\ (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) + \gamma = 180^\circ, \end{cases}$$

z którego otrzymujemy $x = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

Twierdzenie 3 o kącie miedzy dwusiecznymi kątów: wewnętrznego i zewnętrznego trójkąta.

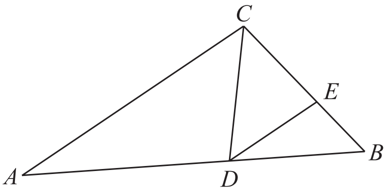


Jeśli AD jest dwusieczną $\sphericalangle CAB$ i BD jest dwusieczną $\sphericalangle CBE$ to

$$\sphericalangle ADB = \frac{\sphericalangle ACB}{2},$$

czyli $x = \frac{\gamma}{2}$.

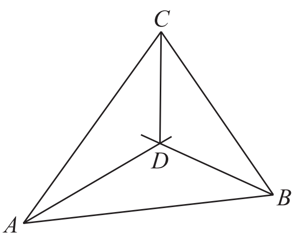
1 Wiedząc, że CD jest dwusieczną $\sphericalangle ACB$, $|CD| = |DB|$, $DE \parallel AC$ oraz $\sphericalangle CDB = 80^\circ$, wyznacz miarę $\sphericalangle CED$.



Wskazówka: nie trzeba stosować twierdzeń.

Odpowiedź: $\sphericalangle CED = 80^\circ$.

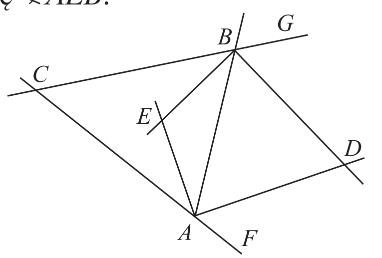
2 Wiedząc, że AD jest dwusieczną $\sphericalangle CAB$, BD jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$, oraz $\sphericalangle ADB = 125^\circ$, wyznacz miarę $\sphericalangle DCB$.



Wskazówka: zastosować twierdzenie 1, następnie zauważyć, że DC to też dwusieczna.

Odpowiedź: $\sphericalangle DCB = 35^\circ$.

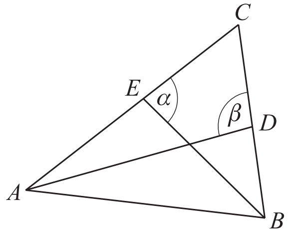
3 Wiedząc, że AE jest dwusieczną $\sphericalangle CAB$, BE jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$, AD jest dwusieczną $\sphericalangle FAB$, BD jest dwusieczną $\sphericalangle ABG$ oraz $\sphericalangle ADB = 65^\circ$, wyznacz miarę $\sphericalangle AEB$.



Wskazówka: zastosować twierdzenia 1 i 2 do trójkąta ABC.

Odpowiedź: $\sphericalangle AEB = 115^\circ$.

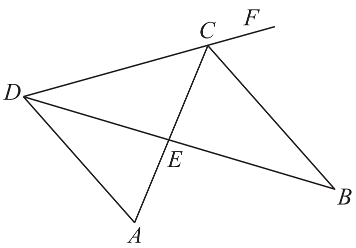
4 Wiedząc, że AD jest dwusieczną $\sphericalangle CAB$, BE jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$, oraz przyjmując $\sphericalangle ACB = 60°$, $\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle ADC = \beta$, znajdź zależność między kątami α i β.



Wskazówka: zastosować twierdzenie 1.

Odpowiedź: $\alpha + \beta = 180°$.

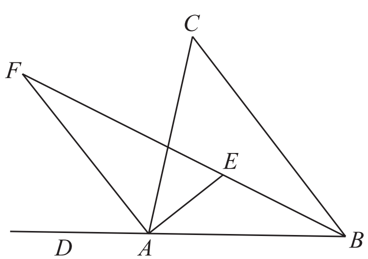
5 Wiedząc, że DB jest dwusieczną $\sphericalangle ADC$, CB jest dwusieczną $\sphericalangle ACF$, $|DC| = |CB|$ oraz $\sphericalangle DEA = 84°$, wyznacz miarę $\sphericalangle DAC$.



Wskazówka: zastosować twierdzenie 3.

Odpowiedź: $\sphericalangle DAC = 64°$.

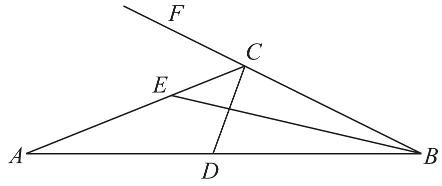
6 Wiedząc, że AF jest dwusieczną $\sphericalangle DAC$, AE jest dwusieczną $\sphericalangle BAC$, BE jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$ oraz $\sphericalangle AEB = 115°$, wyznacz miarę $\sphericalangle AFB$.



Wskazówka: zastosować twierdzenia 3 i 1.

Odpowiedź: $\sphericalangle AFB = 25°$.

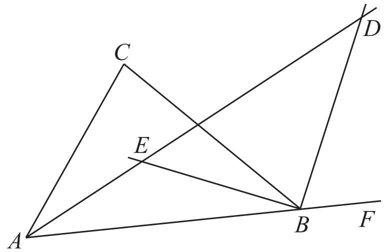
7 Wiedząc, że AC jest dwusieczną $\sphericalangle DCF$, BE jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$ oraz $\sphericalangle ADC = 110°$, wyznacz miarę $\sphericalangle AEB$.



Wskazówka: zastosować twierdzenie 3 do trójkąta DBC.

Odpowiedź: $\sphericalangle AEB = 145°$.

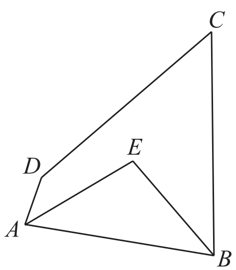
8 Wiedząc, że AE jest dwusieczną kąta CAB, BE jest dwusieczną ABC, BD jest dwusieczną $\sphericalangle FBC$ oraz $\sphericalangle DEB - \sphericalangle EDB =$ $= 10°$, wyznacz miarę ACB.



Wskazówka: zastosować twierdzenia 1 i 3.

Odpowiedź: $\sphericalangle ACB = 80°$.

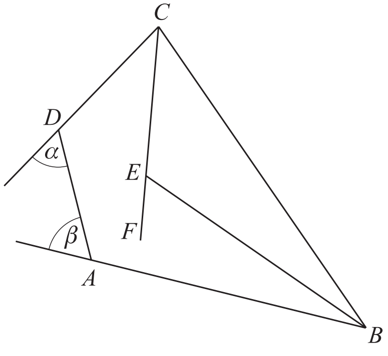
9 Wiedząc, że AE jest dwusieczną $\sphericalangle DAB$, BE jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AEB =$ $= 100°$ oraz że $\sphericalangle ADC = 3\sphericalangle DCB$, wyznacz miarę $\sphericalangle DCB$.



Wskazówka: przedłużyć odcinki AD i BC aż do przecięcia a następnie zastosować twierdzenie 1 do otrzymanego trójkąta.

Odpowiedź: $\sphericalangle DCB = 50°$.

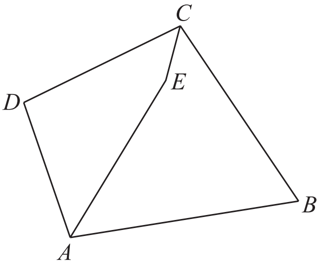
10 Wiedząc, że CE jest dwusieczną $\sphericalangle BCD$, BE jest dwusieczną ABC, $\sphericalangle FEB = 60°$ oraz przyjmując oznaczenia jak na rysunku, wyznacz $\alpha+\beta$.



Wskazówka: zastosować twierdzenie 1.

Odpowiedź: $\alpha+\beta = 120°$.

11 Wiedząc, że CE jest dwusieczną $\sphericalangle DCB$, AE jest dwusieczną $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle AEC = 164°$ oraz $\sphericalangle ABC = 65°$, wyznacz miarę $\sphericalangle ADC$.



Wskazówka: nie trzeba stosować twierdzeń.

Odpowiedź: $\sphericalangle ADC = 97°$. ❑

MONIKA BOLANOWSKA

nauczycielka XII LO we Wrocławiu

PRAWDA CZY FAŁSZ?

105

1. Iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

2. Liczba wymierna ma skończone rozwinięcie dziesiętne.

3. Jeżeli funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie są ograniczone w $\mathbb{R}$, to ich iloczyn $f \cdot g$ zadany wzorem

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

również nie jest funkcją ograniczoną w $\mathbb{R}$.

4. Z ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie $x \in \mathbb{R}$ wynika jej ciągłość w pewnym otoczeniu tego punktu.

5. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rosnąca w otoczeniu punktu $x \in \mathbb{R}$ nie może mieć w tym punkcie ekstremum.

6. Jeżeli (a_n), (b_n) są ciągami liczb rzeczywistych takimi, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0, \text{ to } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ lub } \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

7. Jeżeli (a_n) jest rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych różnych od zera, to ciąg $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ jest ciągiem malejącym.

8. Jeżeli obwód figury F_1 jest większy od obwodu figury F_2, to pole figury F_1 jest większe od pola figury F_2.

nadesłał **Michał Kremzer**