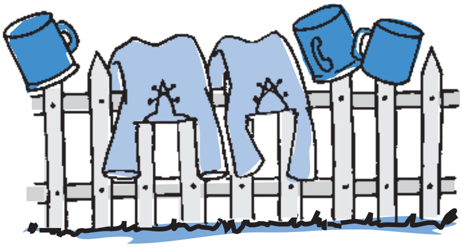
DROGI I ŚCIEŻKI PROWADZĄCE DO ROZWIĄZANIA (10)

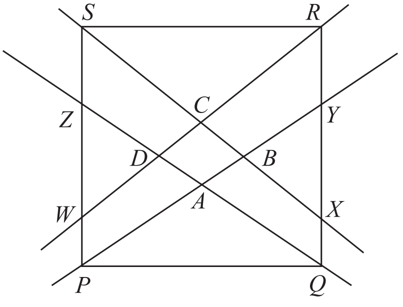
Pomoc *sąsiedzka*



JERZY JANOWICZ

Dobrze mieć sąsiadkę lub sąsiada. Sąsiadka podpowie, jak upiec wspaniałą szarlotkę, a sąsiad użyczy wiertarki. W matematyce też warto dobrze żyć z sąsiadami. Od nich również można pożyczać narzędzia lub przepisy. Jak to robić? Rozwiązując zadanie z pewnej dyscypliny matematycznej, napotykamy niekiedy na trudności, których nie potrafimy obejść. Wówczas warto spojrzeć na problem z pewnego dystansu i próbować wyrazić go językiem innej gałęzi matematyki. Wtedy możemy skorzystać z innych, może bardziej skutecznych środków. Zobaczmy to na kilku przykładach.

1 Kwadrat na rysunku ma bok długości 1, $|PW| = |QX| = \frac{1}{5}$ oraz $|SZ| = |RY| = \frac{1}{3}$.



Oblicz długości przekątnych czworokąta *ABCD*.

2 Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{2}{\pi^{100}} > \sqrt{\pi^{200}+2} - \sqrt{\pi^{200}+\frac{1}{\pi^{200}}}.$$

3 Wykaż, że obwód prostokąta jest nie większy niż obwód kwadratu mającego taką samą przekątną.

4 Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to

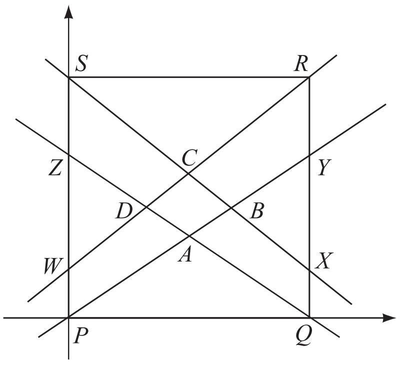
$$a+b \le \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

5 Udowodnij, że dla $\alpha \in (0°, 90°)$ zachodzi nierówność

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + 1)^2 + (\cos\alpha + 1)^2 > 6.$$

Rozwiązania

1. Można to zadanie rozwiązać stosując twierdzenie Talesa, czy podobieństwo trójkątów. Wtedy jednak powoli grzęźniemy w gąszczu proporcji, z którego trudno się wyplątać. A może by tak do sąsiada... Tym razem sąsiad nazywa się Kartezjusz. Dzięki niemu możemy przenieść się do układu współrzędnych i pracować nad zadaniem analitycznie. Współrzędne punktów P, Q, R, S, W, X, Y, Z są łatwe do ustalenia, więc mamy wszystko, co potrzeba do napisania równań czterech prostych.



Otrzymujemy (po krótkich rachunkach):

prosta AB: $y = \frac{2}{3}x,$

prosta BC: $y = -\frac{4}{5}x+1,$

prosta CD: $y = \frac{4}{5}x+\frac{1}{5},$

prosta DA: $y = -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}.$

Kolejny krok też jest naturalny. Należy, rozwiązując odpowiednio dobrane układy równań, obliczyć współrzędne punktów A, B, C, D. Mamy:

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right); \qquad B = \left(\frac{15}{22}, \frac{5}{11}\right);$$

$$C = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right); \qquad D = \left(\frac{7}{22}, \frac{5}{11}\right).$$

Obliczenie długości przekątnych jest teraz bardzo proste:

$$|AC| = \frac{3}{5}-\frac{1}{3} = \frac{4}{15},$$

$$|BD| = \frac{15}{22}-\frac{7}{22} = \frac{4}{11}.$$

2. Szacowanie tak dużych liczb, jak π^{100}, czy π^{200}, albo ich odwrotności nie jest ani proste, ani do końca bezpieczne (dla poprawności dowodu). Zapukajmy więc do sąsiadki. Podstawmy $x = \pi^{100}$ i udowodnijmy, że dla $x > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{2}{x} > \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

Stąd, ponieważ $\pi^{100} > 1$, będziemy mieli dowód nierówności z zadania. Mamy

$$\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} <$$

$$< \sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} =$$

$$= x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x} = \frac{2}{x}.$$

3. Pierwsze skojarzenia (uczniowskie) pójdą z pewnością w kierunku nierówności trójkąta i nie jest to najgorsza droga. Ale warto pokazać, że to zadanie można rozwiązać również korzystając z pomocy algebry. Jeśli oznaczymy: a, b – długości boków prostokąta, c – długość jego przekątnej, to

$$c = \sqrt{a^2+b^2},$$

zaś kwadrat o przekątnej długości c będzie miał bok długości

$$\frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Pozostaje zatem do wykazania, że jeśli $c^2 = a^2+b^2$, to $2(a+b) \le 2c\sqrt{2}$. Zacznijmy od oczywistego faktu, a następnie wykonajmy kilka prostych przekształceń

$$(a-b)^2 \ge 0,$$

$$a^2-2ab+b^2 \ge 0,$$

$$a^2+b^2 \ge 2ab,$$

$$2(a^2+b^2) \ge a^2+2ab+b^2,$$

$$2c^2 \ge (a+b)^2,$$

a więc ostatecznie

$$2(a+b) \le 2c\sqrt{2}.$$

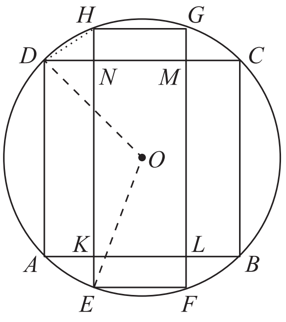
4. Zadanie to jest odpowiednikiem poprzedniego. Skoro tamto, o treści geometrycznej, zostało rozwiązane metodami algebraicznymi, to może tu skuteczne będą środki geometryczne? Oznaczmy: a, b – długości boków prostokąta, c – długość jego przekątnej. Wówczas

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

a kwadrat o przekątnej c ma bok długości

$$\frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Nierówność z zadania można więc przekształcić do postaci $2(a+b) \le 2c\sqrt{2}$ i odczytać w języku geometrii: Obwód prostokąta jest nie większy, niż obwód kwadratu o takiej samej przekątnej. Aby zapewnić sobie równość przekątnej kwadratu i prostokąta wpiszmy obie figury w ten sam okrąg. Przy oznaczeniach, jak na rysunku mamy $|HG| = |NM|$, $|KL| = |EF|$, $|NK| = |DA|$, $|ML| = |CB|$.



Pozostaje do wykazania, że $|ND| \ge |NH|$ (i analogicznie $|MC| \ge |MG|$, $|LB| \ge |LF|$, $|AK| \ge |KE|$). Uczynimy to dowodząc, że $|\sphericalangle NHD| > |\sphericalangle NDH|$. Rzeczywiście $\sphericalangle NHD = \sphericalangle EHD$ jest kątem wpisanym opartym na łuku EAD, czyli na tym samym, na którym opiera się $\sphericalangle EOD$. Ale $|\sphericalangle EOD| > 90°$, zatem

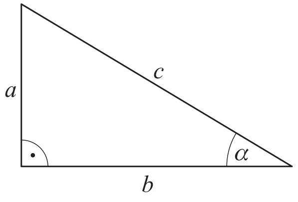
$$|\sphericalangle NHD| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle EOD| > \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°,$$

czyli $|\sphericalangle NDH| < 45°$, więc w istocie

$$|\sphericalangle NHD| > |\sphericalangle NDH|.$$

5. Twardy orzech do zgryzienia? Wygląda na to, że trzeba będzie stosować jakieś złożone wzory trygonometryczne. A tymczasem, usłużni sąsiedzi – geometria i algebra, są tuż tuż. Przy oznaczeniach, które są na rysunku poniżej, możemy napisać:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$



Po podstawieniu – wyrażenie z lewej strony nierówności przyjmuje postać

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}+1\right)^2 + \left(\frac{b}{c}+1\right)^2,$$

a po przekształceniach, w których wykorzystuje się dwa oczywiste fakty: $a^2 + b^2 = c^2$ oraz $a + b > c$ otrzymujemy

$$\frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2}{c^2} >$$

$$> \frac{c^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2}{c^2} =$$

$$= \frac{3c^2 + a^2 + b^2 + 2ac + 2bc}{c^2} =$$

$$= \frac{4c^2 + 2c(a+b)}{c^2} >$$

$$> \frac{4c^2 + 2c \cdot c}{c^2} = \frac{6c^2}{c^2} = 6.$$

❑

JERZY JANOWICZ

nauczyciel w Gimnazjum Samorządowym nr 3 w Bolesławcu, doradca metodyczny