

Tak się składa...

Na pewno każdy słyszał o origami¹. Figury, które my będziemy składać, będą (na pozór) bardzo proste: zwyczajne prostokąty o odpowiedniej „grubości”.

■ WŁODZIMIERZ BĄK

Sprecyzujmy najpierw nasz problem. Otóż, dla danej liczby naturalnej n , odpowiednio składając prostokątny kawałek papieru (np. kartkę z zeszytu), chcemy uzyskać prostokąt o „grubości” n warstw papieru. Dodatkowo żądamy, aby liczba wykonanych złożeń była najmniejsza z możliwych. Dla uproszczenia naszego modelu, będziemy zakładać, że używana kartka jest odpowiedniej wielkości (istotne zwłaszcza dla dużych wartości n), a jej grubość jest znikoma – tak, że bez trudu można zginać nawet pliki wielu arkuszy jednocześnie.

Naturalnym jest oczywiście pytanie, czy w ogóle istnieje rozwiązanie tak postawionego zadania. Zauważmy jednak, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ wykonując $n - 1$ złożeń np. w tzw. *harmonijkę* (rys. 1) otrzymamy prostokąt o grubości n . Zatem o istnienie rozwiązania nie musimy się już martwić. Pozostaje jednak znalezienie owej minimalnej liczby złożeń, jakie dla danego n musimy zrobić. Wyrażając się jeszcze dokładniej, musimy:

□ dla danego n podać szukaną wartość,

¹ Jest to japońska tradycyjna sztuka składania papieru, bez używania kleju i nożyczek.

- wykazać, że mniejsza liczba złożeń nie da oczekiwanego rezultatu,
- podać sposób składania realizujący znalezione minimum.



Rys. 1. Składanie w harmonijkę

Oznaczmy szukaną wielkość przez L_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Wiemy już, że $L_n \leq n - 1$. Aby wyrobić sobie jakieś intuicje związane z badanym zagadnieniem, sprawdźmy, jak wyrazy L_n wyglądają dla początkowych wartości n .

$L_1 = 0$. Nic nie musimy składać – wyjściowy arkusz jest żądanym prostokątem.

$L_2 = 1$. Składamy arkusz na pół.

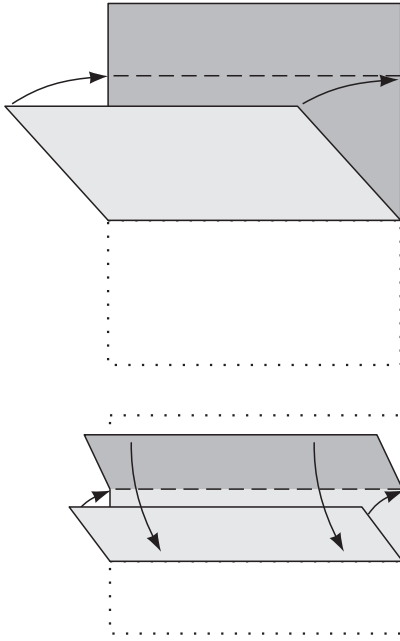
$L_3 = 2$. Harmonijka.

$L_4 = 2$. Wyjściowy arkusz składamy na pół, a później jeszcze raz na pół.

Analogicznie $L_{2^k} \leq k$.

$L_5 = 3$. Obszar o powierzchni $\frac{4}{5}$ arkusza składamy na pół, następnie jeszcze raz na

pół (w tym samym kierunku) i na koniec zaginamy pozostały fragment $\frac{1}{5}$ części arkusza (Rys. 2).



Rys. 2. Przykładowy sposób składania arkusza realizującego minimum $L_5 = 3$

$L_6 = 3$. Najpierw używamy dwóch złożeń, aby otrzymać prostokąt grubości 3, a następnie składamy go na pół.

Nasze nieśmiałe próby wyznaczania kolejnych wartości ciągu L_n podsuwają pewne spostrzeżenia dotyczące sytuacji ogólnej.

(a) Oszacowanie $L_n \leq n - 1$ jest prawdopodobnie dalekie od optymalnego.

(b) Każde kolejne złożenie co najwyżej podwaja grubość wyjściowej figury (być może tylko na pewnym jej fragmencie), stąd $L_{2^k} = k$.

(c) $L_{2k} \leq L_k + 1$, bowiem aby otrzymać prostokąt grubości $2k$, można najpierw złożyć prostokąt grubości k – to wymaga L_k złożeń, a później całość złożyć

na pół. Nie mamy jednak gwarancji, że takie postępowanie jest optymalne, stąd „tylko” nierówność.

(d) Chwila zastanowienia pozwala uogólnić poprzednie spostrzeżenie do własności $L_{km} \leq L_k + L_m$ dla wszystkich k i m naturalnych.

(e) $L_{k+1} \leq L_k + 1$. Własność ta ma „naturę” składania arkusza w harmonijkę, a wynika ona stąd, iż dla otrzymania prostokąta grubości k wszystkie składania (w ilości L_k) możemy robić w jednym ustalonym kierunku – np. poziomo. Wtedy, zostawiając od któregoś z brzegów górnego lub dolnego pasek o szerokości $\frac{1}{k+1}$ wyjściowego arkusza, na pozostałej części po L_k złożeniach (poziomych) dostaniemy prostokąt grubości k , a dokładając pozostały wolny pasek (jedno złożenie) otrzymamy figurę grubości $k + 1$.

Własności (a)–(d) natychmiast jako potencjalną odpowiedź podsuwają funkcję logarytmiczną

$$L_n \approx \log_2 n$$

jednak spostrzeżenie (e) nieco ten obraz psuje. Na chwilę obecną autor nie zna pełnego rozwiązania omawianego tu problemu. Początkowe wyrazy ciągu L_n wyglądają (najprawdopodobniej) następująco:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L_n	0	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	4	5

Mamy nadzieję, że elementarne sformułowanie zagadnienia i łatwa możliwość samodzielnego „eksperymentowania” zachęcą Czytelników do własnych poszukiwań. □

WŁODZIMIERZ BĄK

pracownik Instytutu Matematyki Uniwersytetu Opolskiego,
redaktor działu zadaniowego „Matematyki”