



# Dziadek i babcia

**Zadania o wieku, jakie ostatnio ukazują się w „Matematyce”, pojawiają się często na różnych konkursach, ale sprawiają ich uczestnikom niemałe kłopoty. Dlaczego?**

■ WALDEMAR BIAŁACH

Wstarym zbiorze zadań konkursowych dla szkół podstawowych<sup>1</sup> znalazło się następujące zadanie, bardzo podobne do jednego z zadań o wieku, zamieszczonego w „Matematyce” nr 8/2007:

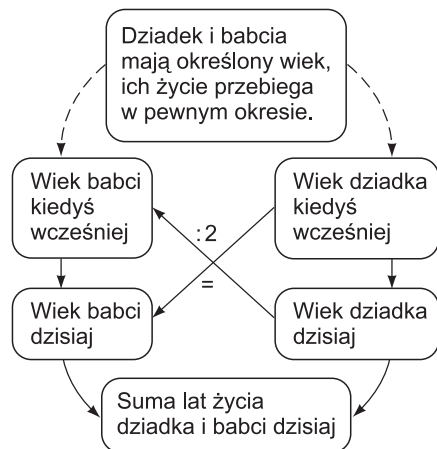
**!** Dziadek i babcia mają razem 147 lat. Dziadek ma dwa razy tyle, ile babcia miała wtedy, kiedy on miał tyle, ile ona ma teraz. Po ile mają oni lat?

Zadanie to przedstawiono 188 uczniom ostatnich klas liceum o profilu matematycznym. Zaledwie 36 osób, czyli 19%, rozwiązało je. Czyżby rozwiązanie wymagało znajomości jakichś szczególnych metod? Wcale nie. Zadanie jest adresowane do młodszych uczniów, a wystarczającym narzędziem do jego rozwiązania jest układ równań liniowych, a więc to nie w zaawansowaniu metody matematycznej leży przy-

czyna trudności. Ich wyjaśnienie to złożoność procesu myślenia, który prowadzi do zapisania równań. Tego typu problemy sygnalizują uczniowie przy rozwiązywaniu zadań z treścią, niezależnie od typu szkoły i poziomu kształcenia.

Przedstawię próbę wyjaśnienia przyczyn wspomnianych trudności, które – moim zdaniem – wiążą się ze specyficzną strukturą tych zadań oraz niewłaściwymi metodami ich analizowania. Moja analiza problemu opiera się na – znanym w psycholingwistyce – mechanizmie integracji pojęciowej, znanym także jako „wymieszanie”.

Treść zadania dotyczy dwóch różnych chwil w życiu bohaterów (to właśnie jest owo „wymieszanie”, w tym przypadku przeszłości z teraźniejszością), a liczby ich lat w tych chwilach są powiązane określonymi zależnościami. Możemy to przedstawić na schemacie:



Rys. 1

<sup>1</sup> Z. Krawcewicz, *Zadania dla uczniów klas V–VIII, uzdolnionych matematycznie*, WSiP, Warszawa 1987.

Najwyżej położony prostokąt zawiera te informacje, które są wspólne dla obu obiektów oraz sytuacji, prostokąty leżące niżej i strzałki pionowe zawierają informacje szczegółowe i charakterystyczne dla każdego z obiektów z osobna, połączone (ale tylko dla jednej z sytuacji) w prostokącie leżącym najniżej. Natomiast strzałki ukośne wskazują, co jest podstawą „wymieszania”. Należy zwrócić uwagę, że opisany mechanizm myślenia uznawany jest za element myślenia twórczego, przy czym wskazuje się, że jest on znacznie trudniejszy od myślenia analogicznego i metaforycznego.

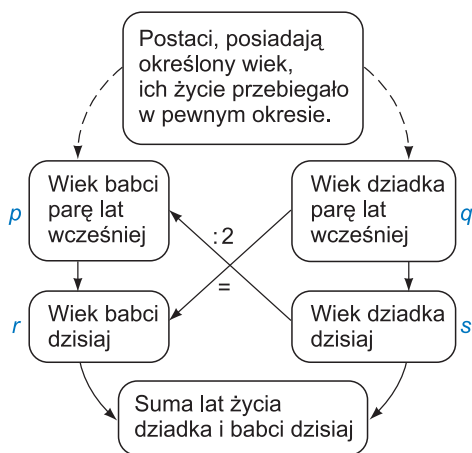
W naszym przypadku mamy dwie postaci „babcię” i „dziadka”, ale mamy też dwie różne chwile z życia tych postaci, które są powiązane logicznie ze sobą.

Jak widać na tym schemacie, zależności opisane w zadaniu wiążą w pary „wiek babci dzisiaj” i „wiek dziadka wcześniej”, oraz „wiek babci wcześniej” i „wiek dziadka dzisiaj”. Próba opisu tych zależności słowami, zgodnie z typowymi metodami analizy treści zadań, musi wiązać się z poważnymi trudnościami, gdyż analiza taka zakłada, że za każdym razem podane są wszystkie zależności między rozpatrywanymi elementami. Natomiast w rozpatrywanym przypadku, opis niektórych zależności musi uwzględniać jednocześnie wiele nieokreślonych elementów tworzących jednorodną całość. Na przykład „wiek babci dzisiaj”, związany jest bezpośrednio z „wiekiem babci parę lat wcześniej” i „wiekiem dziadka parę lat wcześniej”, a pośrednio z różnicą „wieku dziadka dzisiaj” i „wieku dziadka parę lat wcześniej”. Przy takiej tradycyjnej próbie zanalizowania treści zadania, opis na przykład zależności między „wiekiem babci kiedyś” a „wiekiem dziadka dzisiaj” musi zawierać wszystkie odniesienia bezpośrednie i pośrednie. Oznacza to, iż opis

ten powinien zawierać odniesienia do „wieku babci dzisiaj” i „wieku dziadka kiedyś”, ale w tej sytuacji wracamy do opisu identycznego z treścią zadania...

Jedyną możliwością przewyciężenia tej trudności, wydaje się odejście od zapisu słownego i wykorzystanie ilustracji graficznej podobnej do tej jaką przedstawiłem na rys. 1 (ilustracja taka często jest wykorzystywana przez psycholingwistów w trakcie analizowania wypowiedzi niematematycznych). W części zadań o prostszej strukturze zależności, nie jest konieczne budowanie diagramu. Jednak wykorzystując tradycyjne metody analizy trzeba pamiętać o wyodrębnieniu zazwyczaj dwóch zespołów zależności związanych z zachodzącą zmianą (teraz – przedtem, teraz – po pewnym czasie, przed przekształceniem – po przekształceniu). Daje to możliwość kontrolowania tego, co się zmienia.

Wróćmy do analizy rozpatrywanego zadania. Jeżeli wprowadzimy do schematu zmienne (co można zrobić na wiele sposobów), to w prosty sposób otrzymamy odpowiedni układ równań. Na przykład:



Rys. 2

Wtedy odpowiedni układ równań ma następującą postać:

$$\begin{cases} r - p = s - q \\ \frac{1}{2}s = p \\ r = q \\ r + s = 147 \end{cases}$$

Przedstawiona analiza pokazuje, że podstawowa trudność w rozwiązaniu tego zadania wiąże się z właściwym rozpoznaniem związków, jakie zachodzą między poszczególnymi informacjami zawartymi w jego treści – ich strukturze. Podobnie jest z zadaniami typu „ze stacji *A* do stacji *B*...” oraz z wieloma innymi zadaniami z treścią.

Wspomniani na wstępie uczniowie, w ramach tego samego badania, mieli za zadanie określić strukturę różnych zadań matematycznych. Polegało to na przyporządkowaniu do każdego z ośmiu prezentowanych zadań matematycznych odpowiedniego schematu podobnego do tych, które wykorzystałem w przedstawionej powyżej analizie. Omawiając to zadanie uczniowie stwierdzili, że jest ono trudne. Poniższa tabela zawiera rozkład uzyskanych wyników.

Liczba zadań	0	1	2	3	4	5	6	7	8
% uczniów, którzy poprawnie odpowiedzieli na dana liczbę zadań	16	6	9	11	20	18	14	5	1

Biorąc pod uwagę fakt, że zadania testu były bardzo zróżnicowane ze względu na swoją złożoność, od najprostszych takich jak równanie z jedną niewiadomą do złożonych zadań z treścią, wyniki te wskazują, że umiejętność rozpoznawania struktury stanowi problem dla ponad połowy uczniów. Zaledwie 20% uczniów poprawnie określiło strukturę sześciu

i więcej zadań. Liczba ta jest bliska liczbie osób, które rozwiązały podane na wstępie zadanie.

Uzyskane wyniki wskazują, iż procesy rozwiązywania zadań z treścią powinny w pierwszym rzędzie koncentrować się na rozpoznawaniu struktury zależności między danymi, które są zawarte w ich treści. W oczywisty sposób wiąże się to ze zmianą sposobu analizowania takich zadań. W odróżnieniu od tradycyjnych metod, gdzie uwaga skoncentrowana jest na pojedynczych związkach między danymi, konieczne jest w pierwszym rzędzie określanie bardziej ogólnych relacji między danymi, tak jak to pokazałem w przedstawionej analizie. Jest też drugi bardzo ważny wniosek. Zadania z treścią o złożonej strukturze nie mogą pojawiać się zbyt wcześnie w procesie nauczania. Brak właściwego przygotowania intelektualnego uczniów, zwłaszcza we wczesnym okresie nauki, musi prowadzić do trudności w rozwiązywaniu tych zadań. Powinien to być proces stopniowy i zharmonizowany z rozwojem intelektualnym, jednocześnie od możliwie najwcześniejszego okresu uczniowie powinni być uczeni właściwego sposobu analizowania tego typu zadań. □

**WALDEMAR BIAŁACH**  
 nauczyciel Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 4  
 w Wałbrzychu

