Wykorzystanie opcji rzeczywistych

do modelowania wartości nieruchomości

Metodologia opcji rzeczywistych jest prostą metodą do szacowania wartości nieruchomości w przyszłości. **Wartość nieruchomości jest przedstawiona w formie rozkładu wartości,** na podstawie którego można wyznaczyć **wartość średnią,** wartość **najbardziej prawdopodobną** oraz wartość **maksymalną.**

dr Zbigniew Krysiak
SGH

Rozkład wartości nieruchomości uzyskiwany w metodologii opcji rzeczywistych można obserwować w funkcji czasu i może on być wykorzystywany w dwóch celach. Po pierwsze, można w oparciu o rozkład wartości oceniać ryzyko niewypłacalności kredytobiorcy, który zaciągnął kredyt w banku. Po drugie, oceniając opłacalność i moment rozpoczęcia projektu inwestycyjnego realizowanego przez dewelopera, można wykorzystać rozkład wartości do określenia momentu, w którym występuje największe prawdopodobieństwo maksymalizacji korzyści. W każdym przypadku problem sprowadza się do szacowania wartości nieruchomości w funkcji czasu.

Na **rysunku 1** przedstawiono kształtowanie prawdopodobieństwa niewypłacalności w funkcji wartości zadłużenia i odchylenia standardowego rozkładu wartości. Prawdopodobieństwo niewypłacalności (*PD – Probability of Default*) jest odzwierciedlone przez pole obszaru pod krzywą rozkładu między wartością zerową a wartością długu. Innymi słowy, spadek wartości nieruchomości poniżej wartości zadłużenia oznacza ryzyko niewypłacalności. Wraz z upływem czasu zwiększa się odchylenie standardowe rozkładu wartości nieruchomości, w wyniku czego, przy zmniejszającym się poziomie zadłużenia z tytułu spłaty kredytu, zmniejsza prawdopodobieństwo niespłacalności kredytu. Ryzyko takie będzie mogło być odzwierciedlane przez pomiar wskaźnika LTV (*Loan to Value*). W takim przypadku antycypowanie takiego wskaźnika i jego dynamiki staje się ważnym narzędziem monitorowania i zarządzania ryzykiem portfela kredytów hipotecznych w banku. Ryzyko niespłacalności kredytu może się zrealizować albo z powodu braku obsługi kredytu przez kredytobiorcę, albo z powodu uzyskania wpływów ze sprzedaży nieruchomości niższych od wartości zadłużenia. W związku z tym antycypowanie zachowania się wartości nieruchomości w przyszłości, w oparciu o model opcji rzeczywistych, może być dobrym narzędziem do oceny ryzyka straty, w przypadku prowadzenia procesu egzekucji odzyskiwania kredytu przez bank.

Na **rysunku 2** przedstawiono zależność między poziomem zmienności a prawdopodobieństwem uzyskania korzyści dla dewelopera w procesie realizacji projektu inwestycyjnego. Im wyższa zmienność, tym występuje wyższe prawdopodobieństwo osiągnięcia wyższej wartości dodanej, a więc wzrostu kapitału dewelopera.

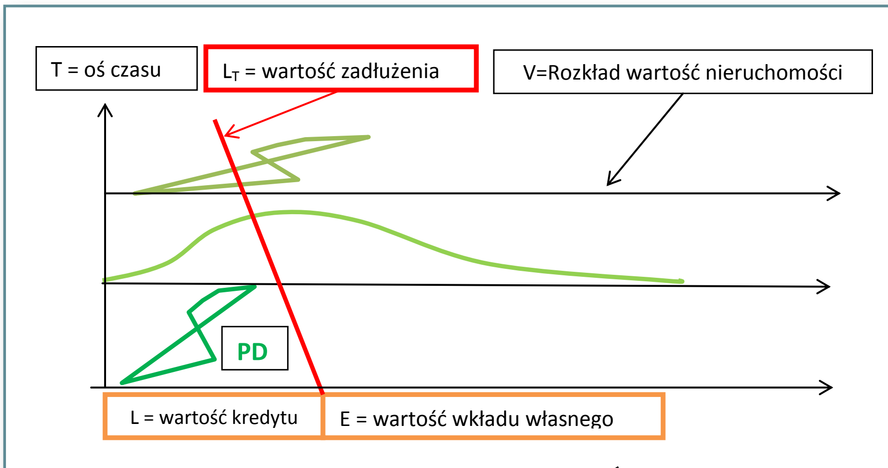
Ponieważ rozkład wartości nieruchomości jest bazą do wyznaczania prawdopodobieństwa niewypłacalności w ocenie ryzyka przy spłacie kredytu hipotecznego, jak i bazą przy wyznaczaniu wartości dodanej, uzyskiwanej przez dewelopera w procesie realizacji projektu inwestycyjnego, dlatego w dalszej kolejności to on będzie głównym punktem uwagi.

Wartość nieruchomości uzyskiwana w modelu opcji rzeczywistych jest wynikiem przyjętej koncepcji procesu zachowania się cen aktywów[1]. Wartość aktywów w tym modelu jest odzwierciedlona przez proces stochastyczny, który składa się z dwóch elementów. Pierwszy to składnik trendu, drugi zaś to składnik stochastyczny. Oba elementy mają wpływ na wartość aktywa w każdej jednostce czasu w przyszłości. Jeżeli w danym momencie t_0 wartość aktywa wynosi V_0, to jego wartość w przyszłości, w czasie $t_0+\Delta t$, będzie równa wartości powiększonej o składnik trendu i jednocześnie powiększona lub zmniejszona o składnik losowy. Wartość składnika losowego jest nieprzewidywalna. To znaczy, że na każdym etapie może nastąpić przyrost lub spadek wartości o dowolną liczbę pochodzącą z pewnego przedziału. Przedział taki jest określany mianem zmienności i jest ustalany jako parametr takiego modelu. Przedział zmienności (*ang. volatility*) jest cechą charakteryzującą kształtowanie się wartości danego rodzaju aktywa. Zmienność taka jest determinowana przez szereg czynników ekonomicznych w otoczeniu mikro i makro. Można traktować parametr zmienności jako agregat odzwierciedlający wszystkie determinanty wpływające na wartość nieruchomości.

Po przyjęciu takiego modelu, w którym owa zmienność zawiera w sobie wszystko, co może wyznaczać wartość, dalsze postępowanie sprowadza się do właściwego wyboru i ustalania zmienności oraz obliczania wartości nieruchomości w kolejnych etapach w przyszłości w oparciu o formuły i algorytm, który wynika z logiki przyjętego modelu. O ile sam algorytm jest niezmienny i ten sam dla każdego przypadku szacowania wartości aktywów, to sama zmienność jest osobliwa dla każdego przypadku i stanowi ona o kształtowaniu wartości.

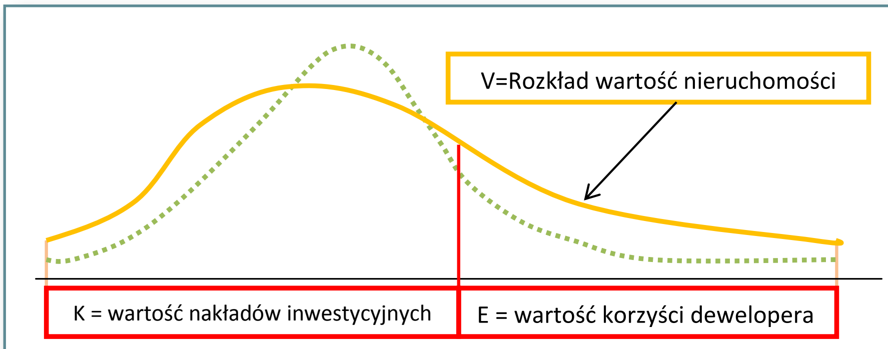
Cechą charakterystyczną i konsekwencją przyjętego modelu

RYSUNEK 1.
Zależność między rozkładem wartości, zadłużeniem i ryzykiem niewypłacalności.



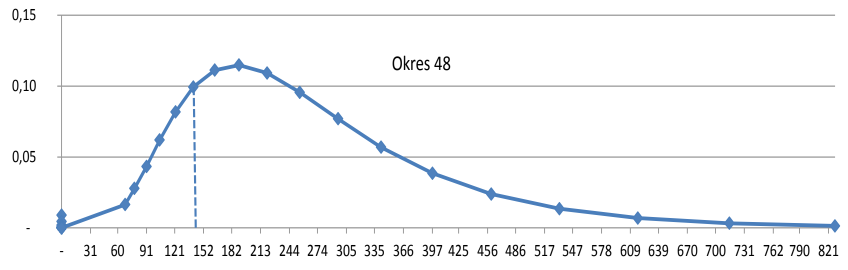
Źródło: Opracowanie własne.

RYSUNEK 2.
Ilustracja zależności pomiędzy zmiennością a wartością korzyści dewelopera.



Źródło: Opracowanie własne.

RYSUNEK 3.
Rozkład wartości nieruchomości w modelu opcji rzeczywistych.



Źródło: Opracowanie własne.

jest fakt, że zmiany rozkładu wartości w przyszłości mają charakter asymetryczny, co przedstawiono na **rysunku 3**, tzn. że występuje większa tendencja do osiągania wyższych wartości niż niższych. Wartości najniższe nie są mniejsze od zera. Wartości wyższe mogą teoretycznie rosnąć do nieskończoności. Jednak istotność statystyczna bardzo wysokich wartości jest tak niska, że można je od pewnego poziomu pomijać.

Na rysunku 3 oznaczono przerywaną linią pionową wartość początkową wartości nieruchomości równą **$V_0 = 145$**. Uzyskany rozkład wartości w wybranym przykładowym **48 okresie** przedstawia asymetrię w kierunku wysokich wartości, co jest skutkiem zmienności jako czynnika „tworzenia" wartości w modelu opcji[2]. W kolejnych okresach od chwili początkowej rozkład wartości powiększa swoją asymetrię pokazując, że wartość firmy w modelu opcji wraz z upływem czasu rośnie.

W dalszej kolejności uwaga będzie skupiona na dwóch głównych elementach: szacowaniu zmienności i algorytmie szacowania wartości. Mimo, że algorytm ma charakter niezmienny, to łatwo jest popełnić określone błędy, które mogą istotnie zniekształcać rezultaty.

Proces zmian wartości w modelu opcji rzeczywistych jest wyrażony równaniem stochastycznym przedstawiony formułą **(1)**:

$$dV = V\mu dt + V\sigma\varepsilon\sqrt{dt} \qquad (1)$$

Gdzie:

V = wartość firmy

μ = trend (systematyczny wzrost wartości)

σ = zmienność wartości (odchylenie standardowe)

t = czas

ε = czynnik losowy, zmienna losowa z przedziału(-1;1) według standaryzowanego rozkładu normalnego, N(0,1)

Całkując równanie (1), uzyskuje się równanie **(2)**:

$$V_t = V_0 e^{\mu t + V\sigma\varepsilon\sqrt{t}} \qquad (2)$$

W dalszej kolejności równanie (2) można przekształcić do postaci równania **(3)**, w którym występują dwa składniki determinujące zachowanie się wartości firmy w czasie. Pierwszy składnik postaci $e^{\mu t}$ to składnik trendu[3], zaś drugi składnik $e^{\sigma\varepsilon\sqrt{t}}$ to składnik losowy. Przyrost wartości w jednostce czasu będzie dodatni wskutek składnika trendu oraz dodatni lub ujemny o wartości bezwzględnej równej wartości składnika losowego o odchyleniu standardowym równym jeden i wartości oczekiwanej równej zero:

$$V_t = V_0 e^{\mu t} e^{\sigma\varepsilon\sqrt{t}} \qquad (3)$$

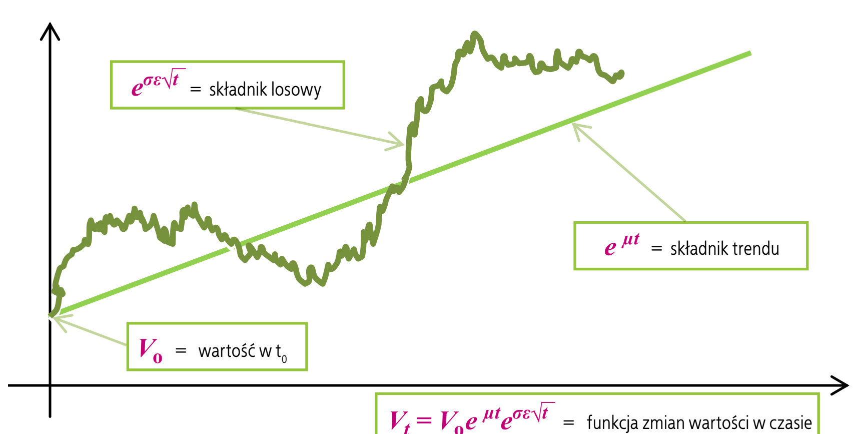
Na **rysunku 4** przedstawiono schematycznie proces zmian wartości nieruchomości w modelu opcji rzeczywistych. Gdyby proces nie był losowy, to posiadałby tylko linię trendu o charakterze deterministycznym. Losowość procesu ma tę zaletę, że wartość w kolejnym okresie czasu jest zależna tylko od wartości obecnej, zatem wszystkie czynniki w przeszłości, które kształtowały cenę obecną, są w niej odzwierciedlone. W dalszej kolejności szacowanie wartości w następnym etapie jest zależne od czynnika losowego. Inną ważną cechą jest to, że kolejna wartość nieruchomości jest losowa w przyjętym przedziale zmienności według rozkładu normalnego.

Można, zatem przedstawić względną zmianę wartości jak w równaniu **(4)**:

$$\frac{\Delta V}{V} = e^{\mu t} e^{\sigma\varepsilon\sqrt{t}} \qquad (4)$$

Dla procesu dyskretnego w modelu dwumianowym są odzwierciedlone zmiany wartości z tytułu składnika losowego w każdej jednostce czasu o maksymalny przyrost w górę lub w dół, czyli 1 lub -1. Oznaczany

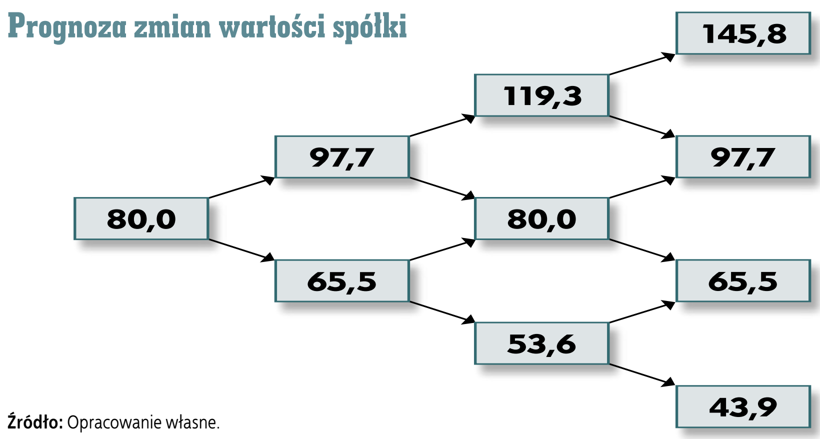
RYSUNEK 4.
Proces zmian wartości nieruchomości w modelu opcji rzeczywistych.



Źródło: Opracowanie własne.

RYSUNEK 5.

Zmiany wartości nieruchomości w trzyokresowym (3 lata) modelu dwumianowym.



Źródło: Opracowanie własne.

w modelu wzrost wartości będzie wynosił $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, zaś spadek wartości będzie wynosił $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Niezależnie od składnika losowego, wartość będzie rosła o stopę μ. Na **rysunku 5** przedstawiono przykładowy przebieg zmian wartości w modelu opcji. Przedstawiony model nazywa się często modelem dwumianowym ze względu na fakt, iż w każdym jednostkowym czasie w przyszłości wartość może uzyskać dwie wartości, tzn. zwiększyć się o „u" lub zmniejszyć się o „d" w stosunku do wartości na początku każdego jednostkowego okresu[4].

W prezentowanym przykładzie zmienność wartości wynosi **σ = 20%**, zaś okres czasu, dla którego będzie obliczana zmiana wartości, wynosi 1 rok. Wartość początkowa nieruchomości wynosi **V_0 = 80**. W dalszej kolejności obliczane są wartości nieruchomości w kolejnych okresach w wariancie wzrostu lub spadku wartości. Prognoza jest wykonywana przez trzy okresy (**Δt = 1**) naprzód tzn. na trzy lata (**T = 3**), stopa wzrostu (trendu) wartości firmy **μ = r = 5%**.

Obliczona stopa wzrostu wartości firmy na każdym etapie wynosi[5]: $u = e^{\sigma\times\sqrt{\Delta t}}$

$$u = e^{\sigma\times\sqrt{\Delta t}} = e^{0,2\times\sqrt{1}} = 1,22$$

Następnie oblicza się stopę spadku wartości na każdym jednostkowym etapie $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, która wynosi w tym przykładzie:

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0,2\times\sqrt{1}} = 0,82$$

Zatem na koniec pierwszego okresu wartość firmy, pod warunkiem, że nastąpi jej spadek, wynosi:

$$V_{1d} = V_0 \times e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 80 \times e^{-0,2\times\sqrt{1}} = 80 \times 0,82 = 65,50$$

Zaś, wartość firmy na koniec pierwszego okresu pod warunkiem, że nastąpi jej wzrost wynosi:

$$V_{1u} = V_0 \times e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 80 \times e^{0,2\times\sqrt{1}} = 80 \times 1,22 = 97,70$$

W roku drugim wartość firmy może wzrosnąć z poziomu **97,70** do **119,3**:

$$V_{2uu} = V_{1u} = V_0 \times u \times u = 80 \times 1,22 \times 1,22 = 80 \times 1,49 = 119,3$$

lub może spaść z poziomu **97,70** do poziomu **80**:

$$V_{2ud} = V_{1u} = V_0 \times u \times d = 80 \times 1,22 \times 0,82 = 80 \times 1,0 = 80$$

Jeśli po pierwszym roku wartość osiągnęłaby poziom **65,5** to może ona wzrosnąć w drugim roku do poziomu **80**:

$$V_{2du} = V_{1d} = V_0 \times d \times u = 80 \times 1,0 = 80$$

lub może spaść do poziomu **53,6**:

$$V_{2dd} = V_{1d} = V_0 \times d \times d = 80 \times 0,82 \times 0,82 = 53,6$$

W ostatnim, trzecim roku mogą być osiągnięte cztery wartości:

$$V_{3uuu} = V_0 \times u^3 = 80 \times 1,22^3 = 145,8$$

$$V_{3uud} = V_0 \times u^2 d = 80 \times 1,22^2 \times 0,82 = 97,7$$

$$V_{3udd} = V_0 \times u\ d^2 = 80 \times 1,22\ \times 0,82^2 = 65,5$$

$$V_{3ddd} = V_0 \times d^3 = 80 \times 0,82^3 = 43,9$$

Zmiany wartości w kolejnych okresach mają charakter „reakcji łańcuchowej", w której z każdego nowego stanu wartości tworzy się dwie kolejne, co przedstawiono na rysunku 5.

Celem prowadzonej analizy jest określenie rozkładu prawdopodobieństwa wartości nieruchomości na końcu każdego okresu. Na **rysunku 6** (na następnej stronie) przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa wartości nieruchomości na koniec **okresu 24** dla analizowanego pewnego przypadku.

Wyznaczenie prawdopodobieństwa dla zbioru wartości osiąganych na koniec każdego okresu odbywa się w oparciu o określenie liczby ścieżek prowadzących do osiągnięcia danej wartości i określenie prawdopodobieństwa osiągnięcia danej wartości na jednej ścieżce.

$$P(V) = LS(V) \times PS(V)$$

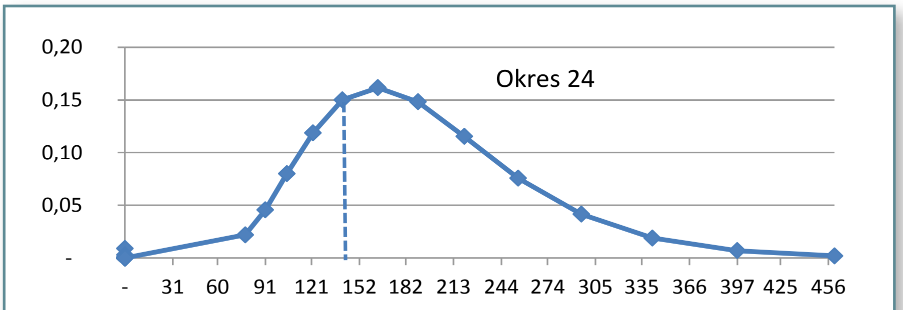
Gdzie:

P(V) = prawdopodobieństwo osiągnięcia danej wartości

LS(V) = liczba ścieżek prowadzących do danej wartości

PS(V) = prawdopodobieństwo osiągnięcia danej wartości na jednej ścieżce

RYSUNEK 6.
Rozkład wartości nieruchomości w modelu opcji rzeczywistych.



Źródło: Opracowanie własne.

Osiągnięcie wartości **80** po drugim roku może odbyć się na dwóch ścieżkach, zaś osiągnięcie wartości **97,7** po trzecim roku może odbyć się na trzech ścieżkach, a także osiągnięcie wartości **65,5** po trzecim roku może odbyć się na trzech ścieżkach. Liczbę ścieżek prowadzących do osiągnięcia danej wartości oblicza się w modelu dwumianowym w oparciu o tzw. trójkąt Pascala. Ilustrację obliczania liczby ścieżek prowadzących do danej wartości w oparciu o trójkąt Pascala przedstawiono na **rysunku 7**. Liczba w wierzchołku trójkąta jest sumą liczb w pozostałych dwóch wierzchołkach. Zasada obliczania liczby ścieżek rozciąga się na drzewo dwumianowe o dowolnej liczbie okresów[6]. Trójkąt Pascala jest potrzebny do obliczania prawdopodobieństwa, jakie uzyskuje dana wartość firmy w dowolnym węźle drzewa dwumianowego. Liczbę ścieżek prowadzących do uzyskania danej wartości w zależności okresu i numeru węzła oblicza się następująco:

$$LS = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Gdzie:

n = numer okresu

x = oznaczenie kolejnego węzła zaczynając od dołu drzewa, przy czym najniższy węzeł jest oznaczany, jako zero „0".

Dla przykładu z rysunku 5, liczba ścieżek dla węzła drugiego od dołu w drugim okresie będzie wynosiła:

$$LS = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2}{1} = 2$$

Liczba ścieżek dla węzła pierwszego od dołu dla okresu trzeciego będzie wynosiła:

$$LS = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{6}{6} = 1$$

Liczba ścieżek dla węzła trzeciego od dołu dla okresu trzeciego będzie wynosiła:

$$LS = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

$$PS = p^x(1-p)^{n-x}$$

Gdzie:

p = prawdopodobieństwo wzrostu wartości

$1-p$ = prawdopodobieństwo spadku wartości

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości w węźle pierwszym od dołu po drugim roku, jak na rysunku 5, wynosi:

$$PS = p^0(1-p)^{2-0} = (1-p)^2$$

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości w węźle drugim od dołu po trzecim roku, jak na rysunku 5, wynosi:

$$PS = p^1(1-p)^{3-1} = p(1-p)^2$$

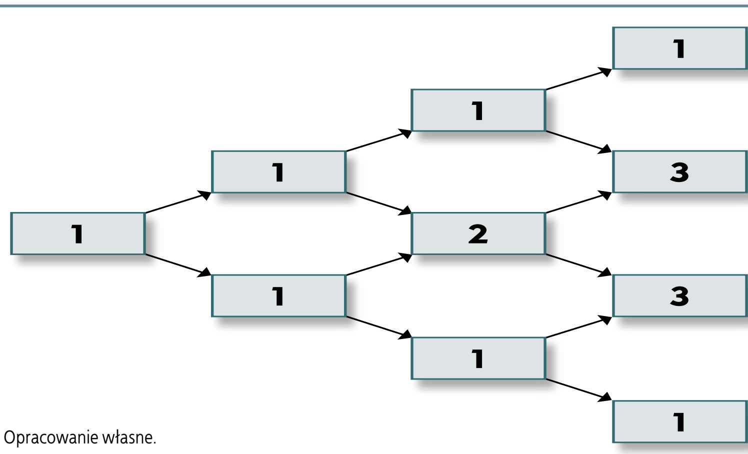
Zmienność wartości oraz stopa wolna od ryzyka (r) determinuje, z jakim prawdopodobieństwem zaistnieje wzrost wartości, a z jakim spadek. Prawdopodobieństwo takie np. dla okresu pierwszego oblicza się w następujący sposób:

$$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = \frac{e^{0,05\times 1}-0,82}{1,22-0,82} = 0,58$$

$$1-p = 1-\frac{e^{rt}-d}{u-d} = 1-\frac{e^{0,05\times 1}-0,82}{1,22-0,82} = 1-0,58 = 0,42$$

Oznacza to, że osiągnięcie wartości **97,7** może odbyć się na jednej ścieżce z prawdopodobieństwem **0,58**. Ponieważ osiągnięcie tej wartości może odbyć się tylko na jednej ścieżce, więc całkowite prawdopodobieństwo uzyskania takiej wartości po pierwszym

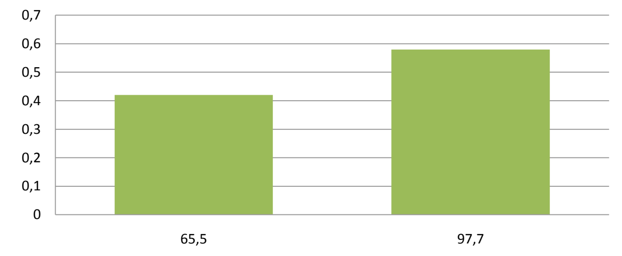
RYSUNEK 7. Liczba ścieżek prowadzących do osiągnięcia danej wartości.



Źródło: Opracowanie własne.

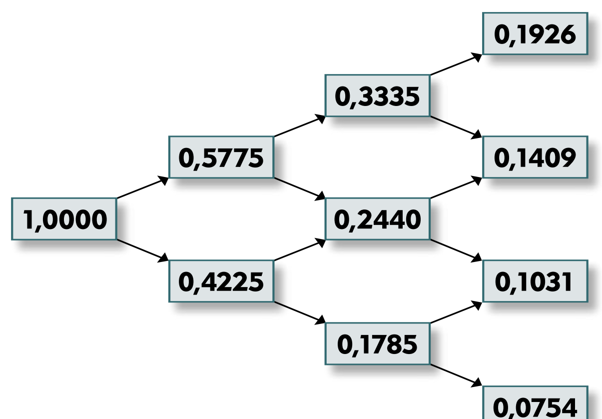
roku jest równe **0,58 × 1 = 0,58**. Osiągnięcie wartości **65,5** może odbyć się na jednej ścieżce z prawdopodobieństwem **0,42**. Ponieważ osiągnięcie tej wartości może odbyć się tylko na jednej ścieżce, więc całkowite prawdopodobieństwo uzyskania takiej wartości po pierwszym roku jest równe

RYSUNEK 8. Rozkład prawdopodobieństwa po 1. roku.



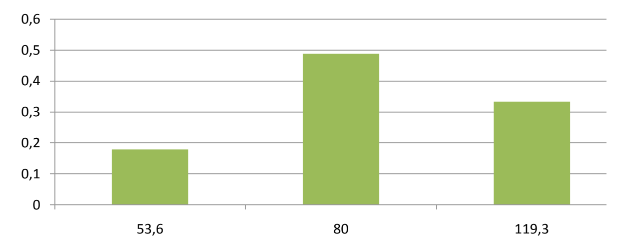
Źródło: Opracowanie własne.

RYSUNEK 9. Prawdopodobieństwa osiągnięcia odpowiednich wartości na jednej ścieżce.



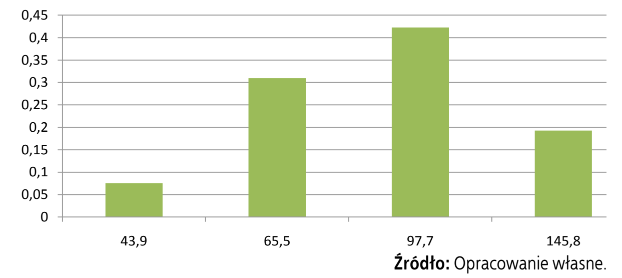
Źródło: Opracowanie własne.

RYSUNEK 10. Rozkład prawdopodobieństwa po 2. roku.



Źródło: Opracowanie własne.

RYSUNEK 11. Rozkład prawdopodobieństwa po 3. roku.



Źródło: Opracowanie własne.

0,42 × 1 = 0,42. Na **rysunku 8** przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa wartości uzyskanych w modelu dwumianowym po pierwszym roku.

Na **rysunku 9** przedstawiono prawdopodobieństwa osiągnięcia wartości firmy na jednej ścieżce. Obliczenie prawdopodobieństwa osiągnięcia danej wartości będzie polegać na pomnożeniu prawdopodobieństwa uzyskania wartości na jednej ścieżce, które są na rysunku 9, przez liczbę ścieżek, które są przedstawione na rysunku 7 w wierzchołkach trójkąta Pascala.

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości **119,3** po roku drugim wynosi: $P(119{,}3) = 0{,}3335 \times 1 = 0{,}3335$

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości **80** po roku drugim wynosi: $P(80) = 0{,}244 \times 2 = 0{,}488$

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości **53,6** po roku drugim wynosi: $P(80) = 0{,}1785 \times 1 = 0{,}1785$

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości **145,8** po roku trzecim wynosi: $P(80) = 0{,}1926 \times 1 = 0{,}1926$

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości **97,7** po roku trzecim wynosi: $P(80) = 0{,}1409 \times 3 = 0{,}4227$

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości **65,5** po roku trzecim wynosi: $P(80) = 0{,}1031 \times 3 = 0{,}3093$

Prawdopodobieństwo uzyskania wartości **43,9** po roku trzecim wynosi: $P(80) = 0{,}0754 \times 1 = 0{,}0754$

Zaprezentowana metoda szacowania rozkładu wartości nieruchomości pozwala na uzyskanie rozkładu z dużym zbliżeniem podobnym do rozkładu ciągłego, pod warunkiem zastosowania większej liczby okresów w analizowanym horyzoncie czasowym. Na przykład jeden rok można podzielić na dwanaście okresów i wówczas w horyzoncie trzyletnim na koniec uzyskuje się trzydzieści siedem punktów rozkładu wartości, co jest wystarczające dla naszkicowania linii „quasi ciągłej" rozkładu. Kluczowym czynnikiem kształtującym rozkład wartości nieruchomości jest przyjmowana zmienność. Problem ten będzie zaprezentowany w następnym numerze kwartalnika „Finansowanie Nieruchomości".

PRZYPISY

1. Proces zmian wartości aktywów w modelu opcji rzeczywistych jest stochastycznym procesem tzw. ruchów Browna. Podstawy dla tych rozwiązań zostały stworzone przez Blacka i Scholesa.
2. Prezentowany rozkład wartości pochodzi z analizy pewnego przypadku szacowania wartości nieruchomości.
3. W modelu opcji składnik ten jest często równy wartości stopy zwrotu aktywów wolnych od ryzyka. Wynika to z tego, że model opcji zakłada, iż czynnikiem wyrażającym ryzyko jest zmienność i dlatego nie jest on już uwzględniany przy trendzie.
4. Występują także modele trójmianowe, w których bieżąca wartość może uzyskać w następnym okresie trzy stany. Mogą być także model cztero- i wielomianowe. W praktyce jednak zastosowanie modeli opcji rzeczywistych sprowadza się w większości do modeli dwu- i trójmianowych.
5. Przyjęte oznaczenia „u" z angielskiego w górę dotyczą wzrostu oraz „d" w dół dotyczą spadku wartości firmy w procesie śledzenia zmian.
6. Wykorzystanie właściwości trójkąta Pascala ułatwia i przyspiesza proces konstruowania algorytmu zmian wartości w arkuszu Excel lub innych programach i arkuszach kalkulacyjnych.